

«Я голосую за Евклида»

В 1864 году преподобный Дж. П. Гулливер из Норвича (Коннектикут) вспомнил разговор с Авраамом Линкольном о том, как президент приобрел свое знаменитое умение убеждать. По словам Линкольна, в основе навыка лежала геометрия [1].

Читая законы, я постоянно натыкался на слово *доказать**. Сначала мне казалось, что я понимаю его значение, но вскоре убедился, что это не так, и обратился к словарю Уэбстера. Там говорилось о «беспорном доказательстве» и о «доказательстве вне возможности сомнения», но я не мог уловить, о какого рода доказательстве идет речь. Я думал, что многие вещи были доказаны вне возможности сомнения без обращения к такому экстраординарному процессу рассуждений, каким я считаю *доказательство*. Я сверился со всеми словарями и справочниками, какие удалось найти, но безрезультатно. С аналогичным успехом вы могли бы объяснять слепому, что такое синий цвет. Наконец я сказал себе: «Линкольн, ты никогда не станешь юристом, если не поймешь, что значит “доказать”» — и ушел со службы в Спрингфилде, отправившись в родительский дом, где и оставался до тех пор, пока не научился мгновенно выдавать любые теоремы из первых шести книг Евклида. Так я выяснил, что означает *доказать*, и вернулся к изучению права.

Гулливер был полностью согласен, ответив: «Никто не может хорошо выступать, если не способен прежде определить для себя,

* В оригинале *demonstrate, demonstration* — именно эти слова используются при описании действий Евклида в английских текстах. *Прим. пер.*

о чем он говорит. Хорошее знание Евклида освободило бы мир от половины его бедствий, изгнав половину бессмыслицы, которая вводит его в заблуждение и причиняет мучения. Я часто думал, что “Начала” были бы одной из лучших книг для включения в каталог “Общества трактатов”*, если бы только они могли заставить людей прочитать ее. Изучение Евклида стало бы средством благодати». Линкольн, по словам Гулливера, засмеялся и согласился: «Я голосую за Евклида».

Как и потерпевший кораблекрушение Джон Ньютон, Линкольн использовал Евклида в качестве источника утешения в тяжелые периоды жизни. В 1850-х годах, после одного срока в Палате представителей, он отошел от политической деятельности и занялся разъездной юридической практикой. На одной из предыдущих работ в качестве землемера он изучил основы геометрии и теперь стремился восполнить пробелы. Его юридический партнер Уильям Херндон, которому часто приходилось делить комнату с Линкольном в маленьких сельских гостиницах, где они останавливались во время разъездов, вспоминал методы учебы Линкольна так: «...Я уже засыпал, а Линкольн, свесив длинные ноги с кровати, засиживался допоздна с зажженной свечой, погрузившись в Евклида».

Однажды утром Херндон застал в конторе Линкольна в состоянии какого-то душевного смятения.

Он сидел за столом, разложив перед собой чистые листы бумаги, большие тяжелые листы, циркуль, линейку, многочисленные карандаши, несколько бутылочек с чернилами разных цветов и множество канцелярских и пишущих принадлежностей. Похоже, он сражался с вычислениями какой-то величины, поскольку вокруг валялись листы бумаги, исписанные кучей цифр. Он был так поглощен своим занятием, что даже не посмотрел на меня, когда я вошел.

* «Американское общество трактатов» (American Tract Society) — некоммерческая организация, которая была основана в 1825 году и занимается публикацией и распространением христианской литературы. *Прим. пер.*

Лишь позднее Линкольн наконец выбрался из-за стола и сказал Херндону, что пытался квадрировать круг. Иными словами, он пытался построить квадрат с той же площадью, что и у заданного круга, причем построить в надлежащем евклидовом стиле — с помощью всего двух инструментов: циркуля и линейки. По словам Херндона, Линкольн просидел над этой задачей два дня подряд «почти до изнеможения».

Мне говорили, что [2] так называемая квадратура круга практически невозможна, но тогда я об этом не знал. И сомневаюсь, что это знал Линкольн. Его попытка решить задачу закончилась неудачей; и мы в конторе, заподозрив, что он довольно чувствителен к этому, старались быть осмотрительными и о ней не упоминать.

Квадратура круга — это очень старая проблема, и я подозреваю, что Линкольн мог знать об ее устрашающей репутации; долгое время квадратура круга была метафорой для трудной или невыполнимой задачи. Данте упоминает о ней в «Раю»:

*Как геометр, напрягший все старанья [3],
Чтобы измерить круг, схватить умом
Искомое не может основанья,
Таков был я...**

В Греции, где все это начиналось, для случая, когда кто-то пытается решить задачу сложнее, чем требуется, есть типичный раздраженный комментарий: «Я не просил вас квадрировать круг!»

Квадрировать круг незачем, единственная мотивация — сложность и известность проблемы. Люди с менталитетом победителя пытались справиться с нею с Античности до 1882 года, когда Фердинанд фон Линдеманн доказал, что решения не существует (но даже

* «Божественная комедия», «Рай», песнь тридцать третья. Перевод М. Лозинского. *Прим. пер.*

тогда некоторые твердолобые упрямы продолжали упорствовать... впрочем, найдутся такие и *сейчас*). Политический философ XVII века Томас Гоббс, чью уверенность в собственных умственных способностях нельзя полностью отразить приставкой «сверх», считал, что справился с задачей. По словам его биографа Джона Обри, Гоббс наткнулся на геометрию в зрелом возрасте и совершенно случайно.

Оказавшись в библиотеке некоего джентльмена [4], он наткнулся на «Начала» Евклида, которые были открыты на теореме 47 книги I*. Он прочитал формулировку. «Черт побери! — воскликнул он (время от времени Гоббс сквернословил для выразительности). — *Это невозможно!*» Тогда он прочел доказательство, оно отсылало его к какой-то другой теореме; ее он тоже прочитал. И так постепенно убедился в истинности утверждения. Это заставило его полюбить геометрию.

Гоббс постоянно публиковал очередные способы доказательства и враждовал с крупнейшими британскими математиками того времени. Однажды какой-то корреспондент указал ему на то, что одно из его построений не совсем верно, поскольку точки P и Q, которые он считал совпадающими, на самом деле находились на немного разном расстоянии от третьей точки R: 41 и 41,012 соответственно. Гоббс возразил [5], что его точки достаточно велики, чтобы покрыть столь ничтожную разницу. Так он и отошел в мир иной в глубокой уверенности, что квадрировал круг**.

Один анонимный комментатор, рецензировавший учебник по геометрии в 1833 году, дал настолько точное описание типичного «квадратурщика», что под него подойдет как Гоббс, живший двумя веками ранее, так и нынешние интеллектуально ущербные личности, по-прежнему корпящие над этой задачей в XXI веке.

* Это теорема Пифагора. *Прим. пер.*

** Долгая и, откровенно говоря, смешная история войны Гоббса с его терпеливыми математическими критиками изложена в главе 7 книги Амира Александра «Бесконечно малые».

Все, что они знают о геометрии [6], — так это то, что в ней есть вещи, которые те, кто изучал ее дольше всего, давно признали невыполнимыми. Услышав, что авторитет знания слишком сильно влияет на умы людей, они предлагают уравновесить его авторитетом невежества; и если случится так, что человек, знакомый с предметом, найдет себе занятие получше, чем выслушивать, как они делятся скрытыми истинами, то он тут же именуется слепым фанатиком, душителем света истины и так далее.

В Линкольне мы находим более привлекательную личность: достаточно амбиций, чтобы попытаться, и достаточно смирения, чтобы признать поражение.

Что Линкольн позаимствовал у Евклида — так это идею, что при известной осторожности вы сможете возвести высокое прочное здание убеждений и согласия с помощью строгих дедуктивных шагов, этаж за этажом, на фундаменте аксиом, в которых никто не может усомниться, или, если хотите, истин, которые кажутся самоочевидными. Тот, кто не считает их таковыми, исключается из дискуссии. Я слышу отголоски Евклида в самом знаменитом выступлении Линкольна — Геттисбергской речи, где он говорит, что Соединенные Штаты убеждены в истинности утверждения, что все люди рождены равными. Слово *утверждение* (*proposition*) [7] — это термин, используемый Евклидом для высказываний, логически вытекающих из самоочевидных аксиом, которые просто нельзя рационально отрицать.

Линкольн не первый американец, искавший основы демократической политики в терминологии Евклида; раньше это делал любивший математику Томас Джефферсон. Линкольн отмечал в письме, прочитанном в Бостоне в 1859 году на торжественной церемонии в память о Джефферсоне, где он не смог присутствовать:

Можно с уверенностью утверждать [8], что человек может убедить любого здравомыслящего ребенка в том, что простые утверждения Евклида истинны; но тем не менее в итоге он

потерпит неудачу с тем, кто будет отрицать определения и аксиомы. Принципы Джефферсона — это определения и аксиомы свободного общества.

В юности Джефферсон изучал Евклида в колледже Вильгельма и Марии и с тех пор высоко ценил геометрию*. Уже будучи вице-президентом, Джефферсон нашел время, чтобы ответить на письмо учащегося из Вирджинии о предполагаемом плане академического обучения, где пишет: «Тригонометрия в известном смысле имеет наибольшую ценность для каждого человека, и едва ли найдется день, когда он не станет прибегать к ней для каких-нибудь надобностей повседневной жизни (хотя бóльшую часть высшей математики он описывает так: “Всего лишь роскошь [9], действительно восхитительная роскошь; не для тех, кому приходится иметь занятие ради пропитания”»).

В 1812 году, уйдя из политики, Джефферсон писал своему предшественнику на посту президента Джону Адамсу:

Я отказался от газет в обмен на Тацита и Фукидида, Ньютона и Евклида и чувствую себя гораздо счастливее [10].

Здесь мы видим реальную разницу между двумя президентами-геометрами. Для Джефферсона Евклид был частью классического образования, необходимого для культурного джентльмена наряду с греческими историками и учеными эпохи Просвещения. Однако с Линкольном — самоучкой, выросшим на ферме, — ситуация обстоит иначе. Вот как преподобный Гулливер описывает Линкольна, вспоминающего свое детство:

Припоминаю, как уходил в свою маленькую спальню после того, как слышал вечерние разговоры соседей с моим отцом,

* Хотя оборот «Мы считаем эти истины самоочевидными» не принадлежит Джефферсону; в его проекте Декларации было написано: «Мы считаем эти истины священными и неоспоримыми». Именно Бенджамин Франклин вычеркнул эти слова и заменил их на «самоочевидные», сделав документ чуть менее библейским и чуть более евклидовым.

и немалую часть ночи расхаживал взад и вперед, пытаюсь понять точный смысл некоторых, на мой взгляд, мрачных фраз. Когда я преследовал какую-то идею, я не мог заснуть, хотя часто пытался, пока не ловил ее; а когда я считал, что поймал, то не удовлетворялся этим, а повторял ее снова и снова, пока не выражал на языке, достаточно ясном, как мне казалось, для любого знакомого мне мальчишки. Это была своего рода страсть, и она осталась со мной, поскольку мне всегда нелегко справиться с какой-то мыслью, пока я не ограничу ее с севера, юга, запада и востока. Возможно, этим объясняются те характерные особенности, которые вы наблюдаете в моих выступлениях.

Это не геометрия, но это взгляды геометра. Вы не оставляете вещи понятыми наполовину, а точно формулируете свои мысли и следите за ходом своих рассуждений точно так же, как Гоббс с изумлением следил за Евклидом. Линкольн считал такого рода систематическое самовосприятие единственным выходом из сумятицы и темноты.

Для Линкольна, в отличие от Джефферсона [11], стиль Евклида — вовсе не то, что пристойно джентльмену или профессору с академическим образованием, поскольку Линкольн не был ни тем ни другим. Это бревенчатая хижина разума, построенная вручную. Если построить ее правильно, она выдержит любые испытания. И она может принадлежать кому угодно в стране, задуманной Линкольном.

ЗАСТЫВШАЯ ФОРМАЛИСТИКА

Представление Линкольна о геометрии для американских масс, как и многие другие его хорошие идеи, было реализовано лишь частично. К середине XIX века геометрия переместилась из колледжей в старшие классы школ, однако в типичном курсе Евклид стал чем-то вроде музейного экспоната: его доказательства следовало запомнить, воспроизвести и в какой-то степени оценить. О том, как кто-то их *придумал*, не было и речи. Сам создатель доказательств практически исчез: один писатель того времени заметил, что «многие

молодые люди [12] читают шесть книг “Начал”, прежде чем случайно узнают, что Евклид — это не название предмета, а имя человека, который о нем написал». Таков парадокс образования: то, чем мы больше всего восхищаемся, мы укладываем в коробочку и засовываем ее в ящик.

Честно говоря, об историческом Евклиде сказать почти нечего, поскольку нам о нем практически ничего и не известно. Он жил и работал в большом городе Александрия в Северной Африке примерно за 300 лет до нашей эры. И это все, что мы знаем. Его «Начала» — это собрание знаний по геометрии греческих математиков того времени; на десерт в конце книги добавлены основы теории чисел. Значительная часть материала была известна математикам еще до Евклида, но радикально новым и революционным шагом стала *организация* этого массива знаний. Из небольшого количества аксиом, в которых почти невозможно сомневаться*, шаг за шагом выводится весь аппарат теорем о треугольниках, прямых, углах и окружностях. До Евклида — если это и правда был Евклид, а не целый коллектив геометров из Александрии, творивший под этим псевдонимом, — такую структуру было невозможно представить. Зато впоследствии она стала моделью для всего замечательного в знании и мышлении.

Конечно, существует и другой способ преподавать геометрию, который делает упор на изобретательность и пытается поместить учащегося в кресло Евклидова пилота, чтобы тот мог самостоятельно создавать определения и смотреть, что из них получится. Один из таких учебников, «Изобретательная геометрия», исходит из предпосылки, что «единственное настоящее образование — это самообразование». Не смотрите на конструкции других людей, советует книга, «по крайней мере пока не откроете собственную конструкцию», — и вы не будете беспокоиться и сравнивать себя с другими учениками: все занимаются в собственном темпе, и вы с большей

* За исключением одной, но этот спорный постулат о параллельных прямых и начавшийся с него двухтысячелетний путь к неевклидовой геометрии обсуждается во многих других местах и здесь будет лишь упомянут.

вероятностью усвоите материал, если вам нравится им заниматься. Сама книга — всего лишь последовательность из 446 головоломок и задач. Одни достаточно просты: «Можете ли вы нарисовать три угла двумя прямыми линиями? А четыре угла двумя прямыми линиями?» У других, как предупреждают авторы, на самом деле не может быть решения, и вы оказываетесь в положении *настоящего* ученого*. А третьи, как и самый первый из вопросов, и вовсе не имеют четкого «правильного ответа»: «Поставьте куб [13] на стол гранью к себе и скажите, что вы считаете толщиной, что — шириной, а что — длиной»**. В целом это всего лишь своего рода «ориентированный на ребенка» исследовательский подход, который высмеивают традиционалисты, считая несоответствующим современному образованию. Книга вышла в 1860 году.

Несколько лет назад в математической библиотеке Висконсинского университета появилась огромная коллекция старых учебников, по которым учились школьники штата последние сто или около того лет***, но в итоге от них отказались в пользу более новых

* — Голубчики, — сказал Федор Симеонович озабоченно, разобравшись в почерках. — Это же проблема Бен Бецалея. Калиостро же доказал, что она не имеет решения.

— Мы сами знаем, что она не имеет решения, — сказал Хунта, немедленно ошетиниваясь. — Мы хотим знать, как ее решать.

— Как-то странно ты рассуждаешь, Кристо... Как же искать решение, когда его нет? Бессмыслица какая-то...

— Извини, Теодор, но это ты очень странно рассуждаешь. Бессмыслица — искать решение, если оно и так есть. Речь идет о том, как поступать с задачей, которая решения не имеет. Это глубоко принципиальный вопрос...

Стругацкие А. и Б. «Понедельник начинается в субботу». *Прим. науч. ред.*

** Это действительно плохо поставленный вопрос: при такой расстановке очевидно, что назвать шириной, высотой и глубиной. Видимо, тут имеется тонкое различие в описании «с точки зрения куба», у которого нет выделенных длины, ширины и толщины, потому что они равны, и со стороны внешнего наблюдателя, который использует естественные для него координаты в трехмерном пространстве. *Прим. науч. ред.*

*** В одной из книг по арифметике, последний раз использованной в 1930 году, я нашел пометку карандашом: «Смотри страницу 170»; на 170-й странице было другое указание: «Смотри страницу 36», где я увидел новую команду, и т. д., пока не добрался до последней страницы, где было написано: «Ты дурак!» Десятилетний мальчик разыграл меня с того света.

вариантов. Глядя на эти потрепанные книги, понимаешь: все споры об образовании уже разворачивались не раз. Все, что мы считаем новым и странным (например, книги наподобие «Изобретательной геометрии», где учеников просят самостоятельно придумывать доказательства; математические книги, делающие задачи «актуальными», связывая их с повседневной жизнью школьников; книги по математике, способствующие продвижению общественных движений), на самом деле старо, в свое время тоже считалось странным и, несомненно, снова станет новым и странным в будущем.

Во введении в «Изобретательную геометрию» говорится, что геометрия имеет «место в образовании всех людей, не исключая женщин»: автор книги, Уильям Джордж Спенсер, — один из первых поборников совместного обучения. Более типичное отношение к женщинам и геометрии в XIX веке отражено (но не одобряется) в романе «Мельница на Флоссе» Джорджа Элиота*, опубликованном в том же году, что и учебник Спенсера. «Девчонки не могут понять Евклида, правда, сэр?» — спрашивает один из персонажей учителя Стеллинга, на что тот отвечает: «У них иногда неплохие способности, но знания их неглубоки, они ничего не могут постичь до конца. Они смышленные, но поверхностные»**. Стеллинг представляет в сатирической форме тот традиционный образ британской педагогики, против которого восставал Спенсер: долгий марш через запоминание авторитетов, при котором медленный и тяжелый строительный процесс понимания не просто игнорируют, его остерегаются. «Мистер Стеллинг был не из тех, кто станет ослаблять и изнеживать ум своего питомца, прибегая к упрощениям и объяснениям»***. Евклид был своего рода тонизирующим средством для укрепления мужественности, и его приходилось терпеть, как крепкий напиток или ледяной душ.

* Здесь уместно напомнить, что Джордж Элиот — псевдоним писательницы Мэри Энн Эванс.

** «Мельница на Флоссе». Книга вторая, глава первая. Перевод Л. Поляковой и Г. Островской. *Прим. пер.*

*** Там же. *Прим. пер.*

Недовольство стеллингизмом стало нарастать даже в верхах математических кругов. Британский математик Джеймс Джозеф Сильвестр, о геометрии и алгебре (а также отвращении к отупляющей мертвенности британской академической науки) которого мы еще поговорим, считал, что Евклида нужно спрятать «подальше от школьников», а геометрию преподавать в связке с физикой, делая акцент на геометрию *движения*, дополняющую статические формы Евклида. «Именно живого интереса [14] к предмету, — писал Сильвестр, — так не хватает нашим традиционным средневековым методам преподавания. Во Франции, Германии и Италии — везде, где я был на континенте, — разум воздействует непосредственно на разум: тем способом, который неизвестен застывшей формалистике наших академических учреждений».

СМОТРИ!

Мы уже не заставляем школьников заучивать и повторять наизусть Евклида. В конце XIX века в учебники стали включать упражнения, в которых ученикам предлагалось строить собственные доказательства геометрических утверждений. В 1893 году эти перемены узаконил сформированный в 1892-м Комитет десяти, возглавляемый президентом Гарварда Чарльзом Элиотом. Комитету было поручено рационализировать и стандартизировать обучение в американских средних школах. По его утверждению, задача геометрии в школе — прививать ученикам навыки строгого дедуктивного мышления. Эта идея прижилась. В ходе опроса пятисот американских учителей об их задачах в преподавании геометрии, проведенного в 1950 году [15], самым популярным был ответ: «Развить навыки ясного мышления и точного выражения», который почти вдвое превысил вариант: «Дать знание фактов и принципов геометрии». Иными словами, мы здесь не для того, чтобы пичкать учеников всеми известными фактами о треугольниках, а для того, чтобы развивать в них умственную дисциплину, позволяющую добывать эти факты из первоначальных принципов. Школа для маленьких Линкольнов.

А для чего нужна эта умственная дисциплина? Может быть, на случай, если в какой-то момент будущей жизни им понадобится окончательно и неопровержимо доказать, что сумма внешних углов многоугольника равна 360 градусам? Я все жду, когда же это произойдет, но пока безрезультатно.

Основная причина обучения детей формулированию доказательств вовсе не в том, что мир полон доказательств, а в том, что мир полон *недоказательств*, и взрослым людям нужно знать разницу. Трудно согласиться с недоказательством, если вы реально знакомы с подлинником.

Линкольн понимал эту разницу. Его друг и коллега-юрист Генри Клей Уитни вспоминал: «Много раз я видел [16], как он срывает маску с заблуждения и стыдит как заблуждение, так и его автора». Мы постоянно встречаемся с недоказательствами, рядящимися в одежду доказательств, и без должного внимания с нашей стороны они часто обходят нашу защиту. Существуют подсказки, которые вы можете высматривать. Когда в математике какой-то автор начинает фразу со слов «Очевидно, что», на самом деле он говорит: «Мне это кажется очевидным. Вероятно, следовало бы это проверить, но я немного запутался в процессе и потому решил просто заявить, что это очевидно». У газетных аналитиков аналогичная фраза начинается со слов: «Конечно, все мы согласны с тем, что». Всякий раз, сталкиваясь с подобным, вы ни в коем случае не должны верить, что все согласны с дальнейшим. Вас просят трактовать нечто как аксиому, но если мы что-то и обязаны выучить из истории геометрии, так это то, что нельзя включать аксиому в свою книгу, пока она не доказала свою реальную ценность.

Всегда скептически относитесь к любому, кто говорит, что он «просто логичен». Если вам рассказывают не о равенстве треугольников, а об экономической политике, или о каком-то недостойно себя ведущем культурном деятеле, или об уступке, которую от вас хотят, то тут нет ничего «просто логичного», поскольку все происходит в контексте, где логические выводы — если они вообще применимы — неотделимы от всего остального. От вас хотят, чтобы вы ошибочно

приняли цепочку уверенно выраженных мнений за доказательство. Но как только вы ощутите резкий *щелчок* настоящего доказательства, вы уже никогда не угодите в эту ловушку. Предложите своему «логичному» оппоненту заняться квадратурой круга.

По словам Уитни, Линкольн выделялся вовсе не сверхмощным интеллектом. Многие общественные деятели очень умны, но среди них есть и хорошие, и плохие люди, с сожалением отмечает Уитни. Линкольна же отличало то, что для него «было морально невозможно [17] спорить нечестно; он не мог этого делать по определению, как не мог красть; по сути, для него было одно и то же — лишить человека собственности путем кражи или путем нелогичных или отвратительных рассуждений». То, что Линкольн позаимствовал у Евклида (или то, что уже имелось у Линкольна и гармонировало с тем, что он нашел у Евклида), — это *целостность*: принцип, что нельзя говорить какие-то вещи, пока ты честно не обосновал свое право их обсуждать. Геометрия — это форма честности. Линкольна можно назвать Геометрическим Эйбом*.

Единственное, в чем я расхожусь с Линкольном, — что он стыдит автора за заблуждения. Труднее всего быть честным с самим собой, и требуется гораздо больше времени и усилий на разоблачение собственных ошибок. Нужно всегда относиться к своим убеждениям, как к расшатанному зубу, то есть к зубу, в крепости которого вы не совсем уверены. И если что-то вызывает сомнения, не стоит стыдиться; просто спокойно отступите на твердую почву и заново переосмыслите проблемное понятие.

Именно этому в идеале должна научить нас геометрия. Однако «застывшая формалистика», на которую жаловался Сильвестр, от этого ой как далека. На практике урок геометрии, который мы преподаем детям, по словам художника, педагога и популяризатора математики Бена Орлина, обычно таков:

Доказательство — это непонятная демонстрация уже известного вам факта [18].

* Отсылка к популярному прозвищу Линкольна — Честный Эйб. *Прим. пер.*

Орлин приводит пример такого доказательства для теоремы о равенстве прямых углов, то есть утверждения, что любые два прямых угла равны. Что можно спросить у девятиклассника, столкнувшегося с этим утверждением? Типичный формат [19] — *доказательство в два столбца*, главная опора геометрического образования в течение более чем ста лет. В нашем случае оно выглядело бы примерно так:

Угол 1 и угол 2 — прямые	По условию
Величина угла 1 равна 90 градусов	Определение прямого угла
Величина угла 2 равна 90 градусов	Определение прямого угла
Величина угла 1 равна величине угла 2	Транзитивность равенства
Угол 1 равен углу 2	Определение равенства углов

«Транзитивность равенства» — одно из общих понятий Евклида, это арифметический принцип, который он излагает в начале своего труда наряду с геометрическими аксиомами. Принцип таков: две вещи, равные третьей, равны между собой*.

Не стану отрицать, что есть определенное удовлетворение в сведении всего к таким крошечным, точным шагам. Они так убедительно складываются вместе, словно детальки лего! И подобное ощущение учителю действительно хочется передать.

Но все же... разве не очевидно, что два прямых угла — это одна и та же вещь, просто расположенная на странице в разных местах с разной ориентацией? На самом деле Евклид считал равенство прямых углов четвертой из аксиом — основных правил игры, которые принимаются как истинные без доказательства и из которых вытекает все остальное. Так почему современная школа требует от учеников предъявлять доказательство этого факта, если даже Евклид сказал: «Да ладно, это очевидно»? Потому что существует много разных наборов аксиом, из которых можно вывести геометрию на плоскости, и поступать в точности так, как Евклид, больше не считается самым строгим или педагогически выигрышным приемом.

* В сценарии Тони Кушнера для фильма Стивена Спилберга «Линкольн» президент ссылается на это в драматический момент.

В 1899 году Давид Гильберт переписал всю аксиоматику с нуля, а аксиомы современной американской школы обычно следуют системе Джорджа Биркгофа 1932 года.

Аксиома это или нет, но тот факт, что два прямых угла равны, ученик просто знает. Вы не можете винить школьников в том, что они разочаруются, когда вы им скажете: «Вы думали, что знаете это, но на самом деле не знали, пока не выполнили все шаги в доказательстве в два столбца». Даже несколько обидно!

Слишком многое на уроках геометрии посвящено доказательству очевидных вещей. Я хорошо помню занятия топологией на первом курсе колледжа. Профессор, весьма выдающийся почтенный ученый, потратил две недели на доказательство следующего факта: если вы проведете на плоскости замкнутую кривую без самопересечений, то, какой бы извилистой и причудливой она ни была, она разделит плоскость на две части: одна внутри, а вторая — снаружи кривой.

С одной стороны, как оказалось, весьма сложно написать формальное доказательство этого факта, известного как теорема Жордана о замкнутых кривых. С другой — эти две недели я провел в состоянии едва сдерживаемого раздражения. Неужели в этом и заключается математика? Делать очевидное трудоемким? Читатель, я просто отключался, так же как и мои однокурсники, среди которых были будущие математики и другие ученые. Парочка, сидевшая передо мной, — весьма серьезные студенты, которые впоследствии получают степени по математике в лучших университетах, — начинала энергично обниматься всякий раз, когда выдающийся почтенный ученый поворачивался к доске, чтобы записать очередной тонкий аргумент о небольшом видоизменении многоугольника. Я имею в виду, что они реально заводились, как будто их подростковая страсть друг к другу могла каким-то образом перенести их в другую часть континуума, где такого доказательства еще нет.

Столь высококвалифицированный математик, каким я стал сейчас, мог бы, слегка выпрямившись, сказать: «Ну, молодые

люди, вы просто недостаточно искушены, чтобы понимать, какие утверждения действительно очевидны, а какие скрывают в себе тонкости». Возможно, я упомянул бы пугающую рогатую сферу Александра*, которая показывает, что аналогичный вопрос в трехмерном пространстве вовсе не так прост, как можно подумать**.

Однако с педагогической точки зрения такой ответ, на мой взгляд, довольно плох. Если в классе мы будем тратить время на доказательство вещей, которые кажутся очевидными, и настаивать на том, что они неочевидны, наши ученики будут кипеть от возмущения, как когда-то я, или найдут себе занятия поинтереснее, когда преподаватель отвернется.

Мне нравится, как мастер преподавания Бен Блум-Смит описывает эту проблему: чтобы учащиеся действительно ощутили огонь математики, им надо испытать *градиент уверенности**** [20] — ощущение перехода от чего-то очевидного к чему-то неочевидному, подталкиваемое вверх двигателем формальной логики. В противном случае мы говорим: «Вот список аксиом, которые выглядят совершенно правильными; складывайте их, пока не получите другое утверждение, которое выглядит совершенно правильным». Это все

* Рогатая сфера Александра делит трехмерное пространство на две части, как и обычная сфера, но другим способом: в то время как на плоскости по теореме Шенфлиса две получающиеся части топологически эквивалентны кругу и плоскости с круглой дыркой для любой кривой без самопересечений. См. Фукс Д. Б. Рогатая сфера Александра. Квант (1990) № 6. *Прим. науч. ред.*

** В математике существует немало вещей, которые кажутся очевидными, но при этом неверны. Рассмотрим утверждение: сплошной шар радиусом 1 сантиметр нельзя разбить на конечное число частей и сложить из них сплошной шар радиусом 1 километр. Утверждение кажется очевидным, однако оно ложно: такое разбиение возможно (парадокс Банаха — Тарского). Аналогично интуиция отрицает существование непрерывной функции, у которой ни в одной точке нельзя провести касательную. Однако такие функции существуют. Поэтому, увы, даже вроде бы очевидные вещи в математике приходится доказывать. *Прим. пер.*

*** Градиент — векторная величина, показывающая направление наибольшего возрастания числовой величины в разных точках какого-либо пространства. Здесь автор использует понятие в переносном смысле — как синоним подъема в гору. *Прим. пер.*

равно что обучать кого-нибудь лего, показав, что из двух маленьких кирпичиков можно сделать один большой. Вы можете это сделать, а иногда вам действительно нужно это сделать, но суть лего, конечно, не в этом.

Вероятно, лучше самому *почувствовать* градиент уверенности, чем говорить о нем. Для этого подумайте на миг о прямоугольном треугольнике.



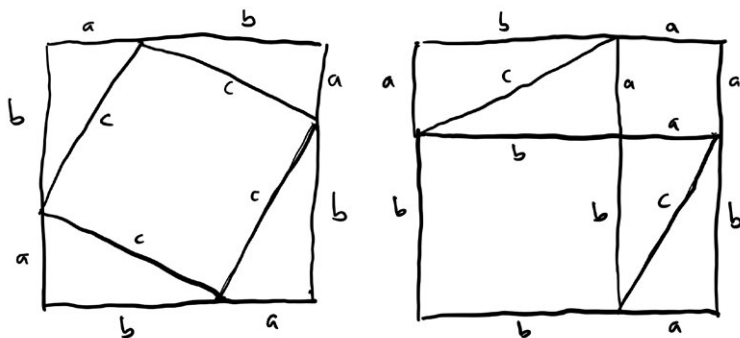
Начнем с интуитивного ощущения: если горизонтальная и вертикальная стороны определены, то известна и диагональ. Если вы пройдете 3 километра на юг, а потом 4 километра на восток, то однозначно удалитесь от исходной точки на какое-то конкретное расстояние.

Но на какое? Для этого нужна теорема Пифагора — первая реальная теорема геометрии. Она говорит, что если a и b — горизонтальная и вертикальная стороны прямоугольного треугольника, а c — диагональ (так называемая гипотенуза), то

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Если $a = 3$, а $b = 4$, то $c^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$. Мы знаем, какое число при возведении в квадрат дает 25: это число 5. Оно и есть длина гипотенузы.

Почему эта формула верна? Вы можете начать подниматься по градиенту уверенности, нарисовав треугольник со сторонами 3 и 4 и измерив его гипотенузу, она будет близкой к 5. Затем нарисуйте треугольник со сторонами 1 и 3 и измерьте его гипотенузу; если вы обращались с линейкой достаточно внимательно, то получите что-то близкое к числу 3,16, которое при возведении в квадрат дает $1 + 9 = 10$. Благодаря этим примерам уверенность увеличится, но это еще не доказательство. А вот это уже оно:



Большой квадрат на обоих рисунках одинаков, но разбит на части двумя разными способами. На первом чертеже четыре копии нашего прямоугольного треугольника и квадрат со стороной c . На втором — тоже четыре копии, но иначе расположенные: остаток квадрата теперь занимают два меньших квадрата со сторонами a и b . Площадь, которая остается в большом квадрате после убирания четырех треугольников, должна быть одинаковой в обоих случаях, а значит, c^2 (площадь, оставшаяся на первом чертеже) будет равна $a^2 + b^2$ (площадь, оставшаяся на втором чертеже).

При желании придаться можно пожаловаться на нестрогое доказательство того, что на первом рисунке квадрат (того, что длина сторон этой фигуры одинакова, недостаточно: сожмите пальцами противоположные углы квадрата — и получите фигуру под названием *ромб*: это явно не квадрат, но стороны по-прежнему равны). Но пусть так. До ознакомления с этой иллюстрацией у вас нет оснований считать, что теорема Пифагора верна, но, увидев ее, вы поймете, почему теорема верна. Подобные доказательства, когда геометрическая фигура разрезается на части, которые потом переставляются, называются *доказательствами разрезания* и ценятся за ясность и изобретательность. Математик и астроном XII века Бхаскара* показывает такую форму доказательства теоремы и находит изображение настолько убедительным, что для него не требуется словесное пояснение, просто подпись

* В истории математики его часто называют Бхаскара II, чтобы отличать от более раннего математика с таким же именем.

в виде одного слова «Смотри!»*. Любитель-математик Генри Перигал в 1830 году придумал собственное доказательство разрезанием, когда пытался, подобно Линкольну, квадрировать круг; он настолько высоко ценил свою схему [21], что спустя почти шестьдесят лет завещал вырезать ее на своем надгробии.

ЧЕРЕЗ МОСТ ОСЛОВ

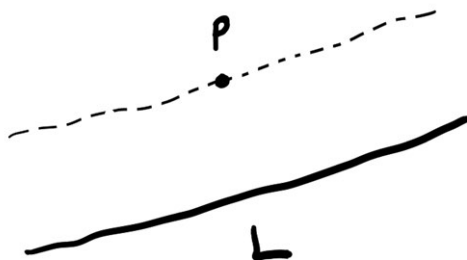
Нам нужно знать, как решать геометрические задачи чисто формальными выводами, однако геометрия — это не просто последовательность чисто формальных выводов. Если бы это было так, то это был бы не лучший способ научить искусству систематических рассуждений в сравнении с тысячей других вещей. Мы могли бы объяснять шахматные задачи или sudoku. Или создать систему аксиом, вообще не имеющую никакого отношения к какой-либо области человеческой деятельности, и заставлять учащихся выводить из нее следствия. Но вместо всего этого мы преподаем геометрию, поскольку она — формальная система, которая *не просто* формальная система. Она встроена в наши представления о пространстве, положении и движении. Мы не можем не быть геометрическими. Иными словами, у нас есть интуиция.

В эссе 1905 года геометр Анри Пуанкаре определил интуицию и логику как два незаменимых столпа математического мышления. Каждый математик склонен к той или иной стороне, и, как отмечает Пуанкаре, нам свойственно именовать геометрами тех, кто сильнее предрасположен к интуитивному мышлению. Нам нужны оба столпа. Без логики мы не могли бы ничего сказать о 1000-угольнике — объекте, который нам не представить ни в каком разумном смысле. Но без интуиции предмет теряет всю свою привлекательность. Пуанкаре объясняет, что Евклид — это мертвая губка:

* Некоторые источники полагают, что доказательство Бхаскары было взято из более раннего китайского математического текста «Чжоу би суань цзин», однако по этому поводу ведутся споры; если на то пошло, то неясно, было ли у самих пифагорейцев то, что мы именуем сейчас доказательством.

Вы, несомненно, видели [22] те тонкие структуры кремниевых игл, которые формируют скелет некоторых губок. Когда органическая материя исчезает, остается только хрупкое и изящное кружево. Правда, там нет ничего, кроме оксида кремния, но интересна именно та форма, которую он принял, и мы не могли бы ее понять, если бы не знали живой губки, которая и придала ему такую форму. Именно так и старые интуитивные представления наших отцов — даже тогда, когда мы отказались от них, — все еще придают форму логическим построениям, которые пришли им на смену.

Каким-то образом нам нужно научить людей делать выводы, не отрицая наличия интуитивных способностей — той самой живой ткани губки. И все же мы не хотим, чтобы нами управляла исключительно интуиция. Здесь поучительна история постулата о параллельных. Евклид включил его в список аксиом: «Если дана прямая L и точка P вне ее, то через точку P можно провести одну и только одну прямую, параллельную прямой L »*.



Это сложно и громоздко по сравнению с другими аксиомами, которые выглядят изящнее, например: «Через любые две точки можно

* Это не совсем так, как сформулировано у Евклида, но эквивалентно его пятому постулату, который он сформулировал еще более топорно и запутанно. [Формулировка Евклида: «И если прямая, падающая на две прямые, образует внутреннее и по одну сторону углы, меньшие двух прямых, то продолженные эти две прямые неограниченно встретятся с той стороны, где углы меньшие двух прямых». «Начала», книга I. Перевод Д. Мордухай-Болтовского. *Прим. пер.*]

провести прямую». Математикам казалось, что было бы лучше, если бы получилось вывести пятую аксиому из четырех других, которые считались более базовыми.

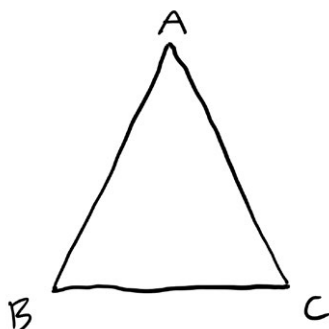
Но зачем? Ведь наша интуиция громко кричит, что пятая аксиома верна. Что может быть бесполезнее, чем пытаться это доказать? Это все равно что спрашивать, можем ли мы доказать, что $2 + 2 = 4$. Мы это знаем!

И все же математики упорствовали, раз за разом безуспешно пытаясь показать, что пятая аксиома выводится из остальных. В итоге оказалось, что усилия изначально были обречены на неудачу, потому что существуют и другие геометрии, в которых *прямая*, *точка* и *плоскость* означают вовсе не то, что подразумевал под этими словами Евклид (и, вероятно, вы), однако они удовлетворяют первым четырем аксиомам, но не удовлетворяют пятой. В некоторых из этих геометрий через точку P проходило бесконечно много прямых, параллельных прямой L . В других не было ни одной такой прямой.

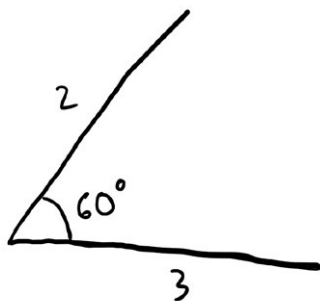
Нет ли тут обмана? Мы же не спрашиваем о каких-то геометрических сущностях других странных миров, которые извращенно называем прямыми. Мы говорим о *настоящих* прямых, для которых пятый постулат Евклида, безусловно, верен.

Да, конечно, вы можете пойти этим путем. Но, поступая таким образом, сознательно закроете себе доступ к целому миру геометрий просто потому, что это не та геометрия, к которой вы привыкли. Неевклидова геометрия — фундамент для обширных областей математики, включая и ту, что описывает физическое пространство, в котором мы реально живем. (Мы вернемся к этому вопросу через несколько страниц.) Мы могли бы отказаться открывать ее на основании своего жесткого евклидова пуризма. Но это была бы наша потеря.

Вот еще один пример, требующий нахождения баланса между формальной логикой и интуицией. Предположим, у нас есть равнобедренный треугольник, то есть его стороны AB и AC равны. Теорема: углы B и C тоже равны.



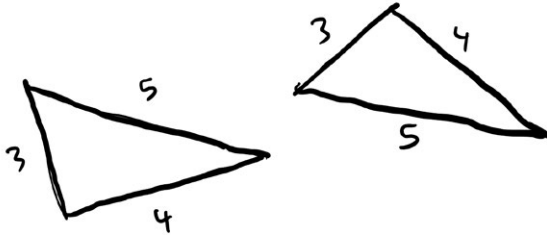
Это утверждение иногда называют *pons asinorum*, то есть мост ослов, потому что это штука, через которую почти всех нас нужно осторожно провести. Здесь доказательство Евклида поважнее, чем вышеописанная ситуация с прямыми углами. Мы сразу оказываемся *in medias res**, хотя в школе подходили к мосту ослов только после нескольких недель подготовки. Поэтому примем как данность Предложение 4 книги I Евклида, где говорится, что если вы знаете две стороны треугольника и угол между ними, то можете найти длину третьей стороны и два оставшихся угла. Иными словами, если я нарисую так:



то существует только один способ восстановить оставшуюся часть треугольника. Другой способ сказать то же самое: если у двух

* Латинское выражение *in medias res* (буквально «в середине вещей») используется, когда в литературном произведении сюжет начинается с ключевого эпизода, без предыстории и долгих описаний. *Прим. пер.*

треугольников равны две пары сторон и углы между ними, то у них равны *все* углы и *все* стороны, то есть, как говорят геометры, треугольники равны, или конгруэнтны.



Мы уже обращались к этому факту, когда угол между двумя сторонами был прямым, но я думаю, что и в случае произвольного угла это кажется столь же понятным.

(Кстати, справедливо и следующее: если три стороны двух треугольников равны, то и треугольники равны; например, если длины сторон 3, 4 и 5 равны, то треугольник должен быть прямоугольным, как я нарисовал выше. Однако это менее очевидно, что Евклид и доказал несколько позднее: Предложение I.8. Если вам кажется, что это очевидно, подумайте о четырехугольнике: вспомните ромб, с которым мы недавно встречались, — у него такие же стороны, как у квадрата, но он же не квадрат.)

А теперь перейдем к *pons asinorum*. Доказательство в два столбца может выглядеть так:

Пусть L — прямая, которая проходит через A и делит угол BAC пополам

Хорошо, пусть

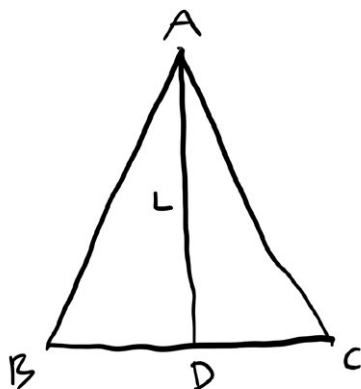
Пусть D — точка, в которой L пересекает BC

По-прежнему никаких возражений*

Да, мы посреди доказательства, но у нас новая точка и новый отрезок AD , так что лучше обновить чертеж! Кстати, вспомните, что,

* Зря: если совсем строго, надо еще доказать, что прямая L пересекает отрезок BC . *Прим. науч. ред.*

по нашему предположению, треугольник равнобедренный, поэтому длина AB и AC одинакова; сейчас мы это используем.



AD и AD имеют равную длину

AB и AC имеют равную длину

Углы BAD и CAD равны

**Треугольники ABD
и ACD конгруэнтны**

Угол B равен углу C

Отрезок равен сам себе

По условию

**Мы выбирали AD так, чтобы угол BAC
делился пополам**

Предложение 1.4 из «Начал»

**Соответствующие углы в равных
треугольниках равны**

QED*.

Это доказательство посерьезнее, чем то, что мы видели, поскольку тут вам действительно приходится что-то делать: вы проводите новую линию L и придумываете название D для точки, где L пересекает BC . Это позволяет вам воспринять точки B и C как углы двух новых треугольников ABD и ACD , которые, как мы продемонстрируем далее, равны.

Однако существует и более хитрый способ, изложенный примерно через шестьсот лет после Евклида Паппом Александрийским, еще одним геометром из Северной Африки, в трактате

* Сокращение латинских слов *Quod Erat Demonstrandum*, означающих «что и требовалось доказать».

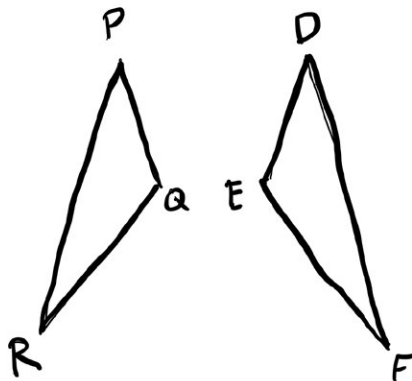
Συναγωγή («Математическое собрание»). (Слово «синагога» означает «собрание», и в античном мире оно могло обозначать собрание математических предложений, а вовсе не собрание евреев на молитву.)

AB и AC имеют одинаковую длину	По условию
Угол A равен углу A	Угол равен сам себе
AC и AB имеют равную длину	Ты уже говорил это; к чему ты клонишь, Папп?
Треугольники BAC и CAB конгруэнтны	Снова Предложение I.4 из «Начал»
Угол B равен углу C	Соответствующие углы в равных треугольниках равны

Погодите, что произошло? Казалось бы, мы ничего не делали, а нужное заключение появилось просто из ниоткуда, как кролик, выпрыгивающий при отсутствии шляпы. Это создает определенное беспокойство. Это не то, что понравилось бы Евклиду. Но так или иначе, на мой взгляд, это верное доказательство.

Ключ к идее Паппа — предпоследняя строка: треугольники BAC и CAB конгруэнтны. Кажется, что это просто утверждение о равенстве треугольника самому себе, которое выглядит тривиальным. Но присмотритесь более внимательно.

Что на самом деле мы имеем в виду, говоря, что два разных треугольника PQR и DEF конгруэнтны?



А вот что! Мы утверждаем сразу шесть вещей: длина PQ равна длине DE , длина PR равна длине DF , длина QR равна длине EF , угол P равен углу D , угол Q равен углу E , угол R равен углу F .

Конгруэнтен ли треугольник PQR треугольнику DFE ? Нет, потому что на рисунке длина стороны PQ не равна длине соответствующей стороны DF .

Если мы серьезно воспринимаем определение конгруэнтности (а для нас, геометров, принимать определения всерьез — в некотором роде фирменная фишка), то треугольники DEF и DFE не конгруэнтны, *несмотря на то что это один и тот же треугольник*. Потому что DE и DF имеют разную длину.

Однако в нашем доказательстве с мостом ослов треугольник равнобедренный, а потому, когда мы воспринимаем его как треугольник BAC , он в точности тот же, что и в случае, когда мы его рассматриваем как треугольник CAB . Это не тривиальное утверждение. Если я говорю, что имя АННА читается одинаково в обоих направлениях, я в действительности сообщаю вам тот факт, что это палиндром. Возражать против самой концепции палиндрома, заявляя: «Ну конечно, это одно и то же, там две буквы А и две буквы Н, а порядок не важен», — чистое извращение.

На деле слово «палиндромный» было бы хорошим названием для треугольников типа BAC , который конгруэнтен треугольнику CAB , получаемому при записи вершин в обратном порядке. Именно благодаря такой идее Папп и сумел пройти через мост, не прибегая к дополнительным линиям и точкам.

И все же доказательство Паппа не вполне объясняет, почему равнобедренный треугольник имеет два равных угла. Представление о палиндромности равностороннего треугольника, то есть о том, что он остается таким же при записи вершин в обратном порядке, говорит вам то же, что (я уверен) и ваша интуиция: треугольник остается неизменным, когда вы берете его, переворачиваете и кладете обратно на то же место. Как и слово-палиндром, он обладает *симметрией*. Вот почему нам кажется, что углы должны быть равны.

На уроках геометрии нам обычно не разрешают говорить о переворачивании фигур*, хотя делать это нужно. С какими бы абстракциями мы ни имели дело, математика — это то, чем мы занимаемся с помощью нашего тела. И прежде всего — геометрия. Иногда буквально: каждый математик обнаруживал, что рисует невидимые фигуры с помощью жестов, и как минимум одно исследование [23] показало, что дети, которым предлагали представить геометрическую задачу в движениях, чаще приходили к верному заключению**. Говорят, сам Пуанкаре в геометрических рассуждениях полагался на свое чувство движения. Он не был визуалом и плохо запоминал лица и фигуры, поэтому, когда ему требовалось [24] нарисовать картинку по памяти, он, по его словам, вспоминал не то, как она выглядела, а то, как по ней двигался его взгляд.

РАВНОБЕДРЕННОСТЬ

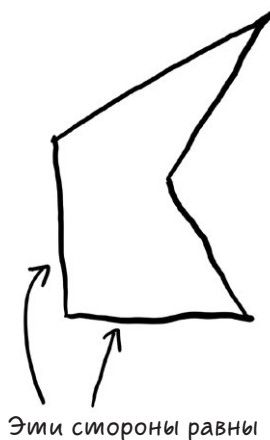
Что означает слово «равнобедренный» в названии треугольников? Прежде всего то, что две его стороны равны. В греческом языке используется слово σκέλη (скеле), что значит «ноги», отсюда и английское *isosceles*. В китайском слово 等腰 составлено из иероглифов *равный* и *талия*, на русском языке у такого треугольника равные бедра, а на иврите — равные голени. В любом случае мы, похоже, согласны с тем, что быть равнобедренным означает иметь две равные стороны. Но почему? Почему бы не определить равнобедренный треугольник как треугольник, у которого равны два угла? Вы, вероятно, заметили (а весь смысл *pons asinorum* в том, чтобы

* В Соединенных Штатах стандарты образования Common Core, которые должны были обеспечить универсальную базу для обучения детей по двенадцатилетней системе K-12, сейчас явно сдают позиции. В них действительно требуется, чтобы на уроках геометрии рассматривали симметрию. Остается надеяться, что, когда стандарты Common Core отступят, обсуждение симметрии останется в программах, подобно ледниковой морене.

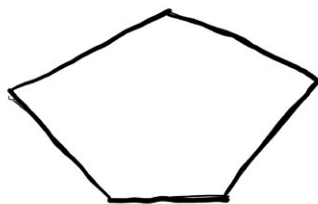
** Хотя частота построения формального доказательства сделанного вывода при этом не увеличивалась!

это доказать!), что равенство двух сторон означает равенство двух углов, и наоборот. Другими словами, эти два определения эквивалентны и задают одно и то же множество треугольников. Но я бы не сказал, что это одно и то же определение. Существуют и другие варианты. Более современно было бы определить равнобедренный треугольник как палиндромный: треугольник, который вы можете взять, перевернуть, положить обратно, и он при этом не изменится. То, что у такого треугольника будут две равные стороны и два равных угла, следует почти автоматически. В этом геометрическом мире рассуждение Паппа показывало бы, что треугольник с двумя равными сторонами равнобедренный, а треугольники BAC и CAB совпадают.

Хорошее определение — то, которое проливает свет на ситуации, выходящие за рамки того, для чего оно было придумано. Идея, что *равнобедренный* означает *не изменяющийся при переворачивании*, дает нам хорошее представление о том, что такое равнобедренная трапеция или равнобедренный пятиугольник. Вы могли бы сказать, что равнобедренный пятиугольник — тот, у которого две стороны равны, но тогда вы соглашаетесь на перекошенные обвисшие пятиугольники наподобие этого:



Но хотите ли вы этого? К определению «равнобедренный» явно лучше подходит вот такой симпатичный пятиугольник:



И в самом деле, в школьном учебнике равнобедренная трапеция — это не фигура с двумя равными сторонами или двумя равными углами, а фигура, которую можно перевернуть, и она не изменится. Сюда прокралось постевклидово понятие симметрии, потому что наши мозги устроены так, что его замечают. Все чаще и чаще идея симметрии становится основанием для доказательств на уроках геометрии. Это не Евклид, но именно такова сейчас геометрия.



[Почитать описание, рецензии
и купить на сайте](#)

Лучшие цитаты из книг, бесплатные главы и новинки:



[Mifbooks](#)



[Mifbooks](#)



[Mifbooks](#)