В поиске своих корней 8

Более 2500 лет математики мучились над решениями уравнений относительно *x*. Путь поиска решений[27], то есть нахождения корней этих уравнений, для все более и более сложных уравнений стал одним из великих эпосов в истории человеческой мысли.

Одна из первых подобных задач поставила в тупик граждан Делоса* примерно в 430 году до н. э. Отчаявшись предотвратить распространение чумы, они, по совету Дельфийского оракула, вознамерились увеличить объем кубического алтаря бога Аполлона в 2 раза. К сожалению, оказалось, что удвоение объема куба[28] требует знания и умения извлекать кубический корень из 2. Посредством того ограниченного арсенала геометрических инструментов, который имелся в то время у греков (циркуль и линейка), решить эту задачу было невозможно.

Более поздние исследования подобных задач выявили еще одну неизбежно возникающую раздражающую мелочь: в процессе решения уравнений очень часто приходилось извлекать квадратные корни из отрицательных чисел[29]. Над этим еще довольно долго смеялись, как над чем-то ложным и софистическим.

Математики почти до 1700-х годов отрицали возможность извлекать квадратные корни из отрицательных чисел, поскольку те не могли быть положительными числами, так как положительное число, умноженное на

* Делос — остров в Эгейском море. *Прим. ред.*

положительное, всегда дает положительное. А мы ищем числа, квадраты которых отрицательные. Они не могли быть и отрицательными числами, так как отрицательное число, умноженное на отрицательное, опять же дает положительное. Казалось, не было никакой надежды на получение числа, которое при умножении на себя даст отрицательное число.

Здесь мы опять наблюдаем очередной кризис. Они неизменно возникают в математике в случае, когда уже существующие операции пытаются применять в числовых областях, где применить их уже нельзя. Так, вычитание бóльших чисел из меньших породило отрицательные числа (см. главу 3), а деление породило дроби (см. главу 5), необходимость извлекать квадратные корни в конечном итоге вынудила вновь расширить вселенную чисел.

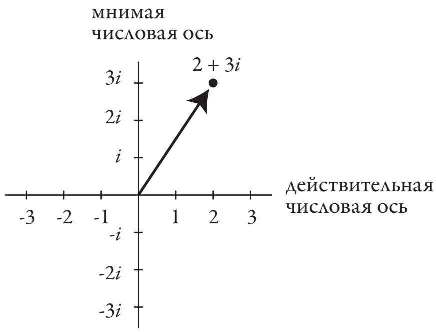
Исторически так сложилось, что этот шаг был самым болезненным. Квадратный корень из –1 до сих пор носит унизительное название «мнимый».

Этот новый вид чисел (или, если вы предпочитаете быть агностиками, называйте их символами, а не числами) определяется таким свойством, что

$$i^2 = -1.$$

То, что i нельзя найти на числовой оси, действительно правда. В этом отношении i гораздо более необычно, чем ноль, отрицательные числа, дроби и даже иррациональные числа, но, как ни странно, у всех мнимых чисел есть место на числовой оси. И при достаточном воображении наш ум может его отыскать и для i тоже. Оно «живет» на собственной мнимой оси, расположенной под прямым углом к основной. И, наложив мнимую ось на ось реальную числовую, вы создадите 2D-пространство, то есть двумерную плоскость, где обитают воображаемые числа.

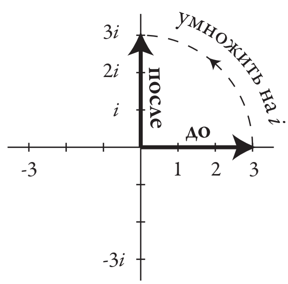
Это комплексные числа. Но их комплексность означает не сложность, а то, что два типа чисел, действительных и мнимых, скреплены вместе и образуют сложное, гибридное число, например $2 + 3i$.



Комплексные числа — это сверкающая вершина всей системы чисел. Они радуют теми же свойствами, что и реальные числа. Их можно складывать и вычитать, умножать и делить, но они *лучше* реальных чисел, потому что из них всегда можно извлечь корни. Вы можете извлечь из комплексного числа квадратный корень, корень третьей степени или вообще корень любой степени, а в результате все равно получится комплексное число.

И напоследок грандиозное утверждение, называемое основной теоремой алгебры. В нем говорится, что корни любого многочлена — всегда комплексные числа. В этом смысле они завершают поиски святого Грааля. Вселенная чисел больше не должна расширяться. Комплексные числа — кульминация путешествия, которое началось с единицы.

Вы можете оценить полезность комплексных чисел (то есть почувствовать их правдоподобие), если знаете, как их визуализировать. Ключом к визуализации станет понимание того, что такое умножение на i. Предположим, мы умножаем произвольное положительное число, скажем 3, на i. Результатом будет мнимое число $3i$.

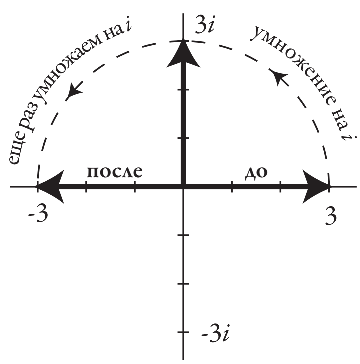


Таким образом, умножение на i представляет собой вращение против часовой стрелки на четверть оборота. До умножения на i число 3 обозначается стрелкой длиною 3, направленной на восток, результатом умножения на i будет стрелка такой же длины, но направленная на север.

Инженеры-электротехники любят комплексные числа именно по этой причине. Иметь такой компактный способ представления вращения на 90° при работе с переменным током, напряжением или электрическими и магнитными полями очень удобно, потому что они часто связаны с колебаниями или волнами, которые составляют четверть цикла (то есть представляют сдвиг фазы на 90°).

Действительно, комплексные числа необходимы всем инженерам. В авиационно-космической промышленности они облегчили расчеты подъема крыла самолета. Инженеры-строители и инженеры-механики регулярно используют их для анализа вибрации элементов пешеходных мостов, небоскребов и автомобилей на ухабистой дороге.

Поворот на 90° также проливает свет на то, что на самом деле означает $i^2 = -1$. Если мы умножим положительное число на i^2, то стрелка, равная длине положительного числа, повернется на 180° в направлении с востока на запад, так как производится два поворота на 90° (по одному для каждой степени i), в итоге — на 180°.



Но умножение на -1 делает такое же сальто на 180°. Вот поэтому $i^2 = -1$.

Компьютеры вдохнули новую жизнь в комплексные числа и вековую проблему извлечения корней. Когда ПК не используются нами для веб-серфинга или отправки и получения электронной почты, они на наших столах способны обнаружить такое, что древние и представить себе не могли.

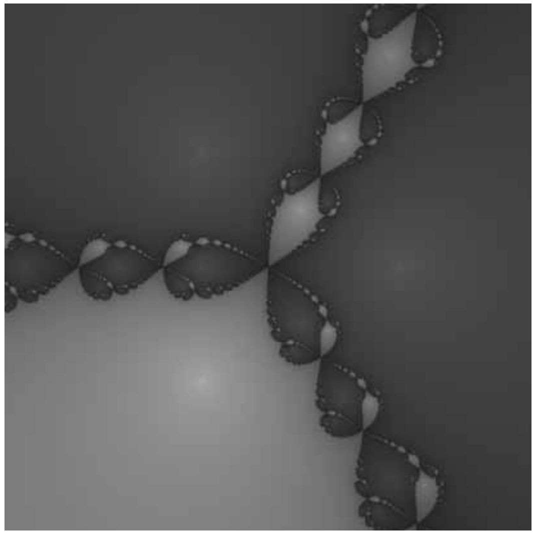
В 1976 году мой коллега по Корнуолльскому университету Джон Хаббард попытался применить в задачах по динамике метод Ньютона[30], мощный алгоритм для поиска корней уравнений в комплексной плоскости. В соответствии с этим методом выбирается начальное значение (близкое к значению корня) и неоднократно производятся определенные вычисления. При этом на каждом последующем шаге используется значение, полученное на предыдущем. Этот метод позволяет быстро приблизиться к корням уравнения.

Хаббард заинтересовался *множественными* корнями. Какой из множественных корней можно найти методом Ньютона? Хаббард доказал, что из двух корней всегда будет найден тот, который наиболее близок к начальному значению. Однако при наличии трех и более корней его предыдущее доказательство не сработало.

Тогда Хаббард провел так называемый *численный эксперимент*. Он запрограммировал компьютер на выполнение метода Ньютона, настроив устройство так, чтобы оно маркировало цветом миллионы различных начальных значений в соответствии с тем, к какому корню они приближались, и меняло интенсивность цвета в зависимости от скорости их приближения к корню.

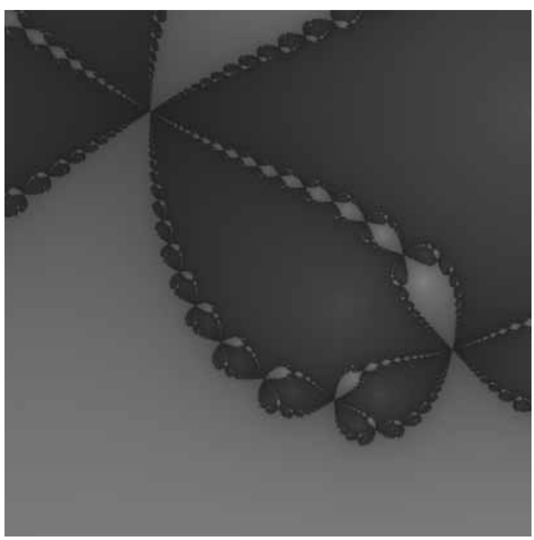
До того как Хаббард увидел результат, он предполагал, что к корням уравнения быстрее всего притянутся наиболее близкие к ним по значению, и это отобразится в виде ярких точек на сплошном цветовом пятне. Но вот границы между пятнами? О них он даже не думал.

Компьютер выдал неожиданный результат.



Пограничная область между пятнами напоминала психоделические галлюцинации[31]. Цвета в ней смешивались беспорядочно, соприкасаясь друг с другом в невероятно большом количестве точек. Они всегда располагались в трех направлениях. Другими словами, где бы ни появлялись два цвета, между ними всегда присутствовал третий.

Расширение границ выявило наличие пятен внутри пятна.



Структура была фрактальной[32] — сложной формы, внутренняя структура которой повторялась во все более мелких масштабах.

Кроме того, вблизи границы царил хаос. Две точки могли вначале находиться очень близко друг к другу, какое-то время попрыгать рядышком, а потом разойтись к разным корням. Выбранный корень был так же непредсказуем, как выигрышные числа при игре в рулетку. Мелочи, крошечные, незаметные изменения в начальных условиях могли полностью изменить всю картину.

Работа Хаббарда была одной из первых вылазок в область науки, ныне называемой *комплексная динамика*, — потрясающее сочетание теории хаоса, комплексного анализа и фрактальной геометрии. В некотором смысле это позволило геометрии вернуться к своим корням. В 600 году до Рождества Христова руководство для строителей храма в Индии[33], написанное на санскрите, давало подробные инструкции, как при проектировании ритуальных алтарей вычислять квадратные корни. Спустя свыше 2500 лет математики все еще ищут корни, но в настоящее время инструкции пишутся в двоичном коде.


УДОВОЛЬСТВИЕ
{ОТ}
Х