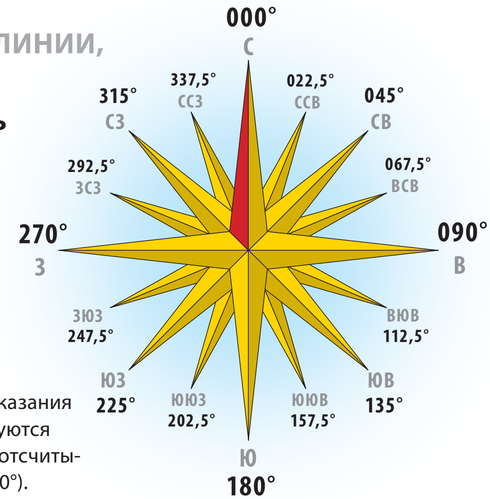
Что такое геометрия?

ГЕОМЕТРИЯ — ЭТО РАЗДЕЛ МАТЕМАТИКИ, ИЗУЧАЮЩИЙ ЛИНИИ, УГЛЫ, ФИГУРЫ И ТЕЛА.

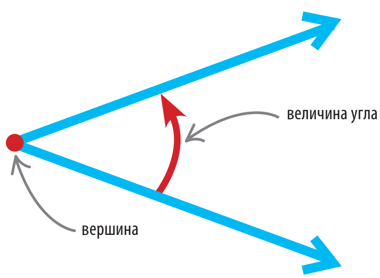
На протяжении тысяч лет геометрия широко использовалась для решения практических задач: в межевании земельных участков, строительстве зданий, морской навигации и изучении движения небесных светил.



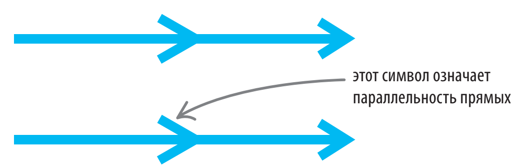
▷ **Азимуты**
В навигации для указания азимутов используются градусы, которые отсчитываются от севера (0°).

Линии, углы, фигуры и тела

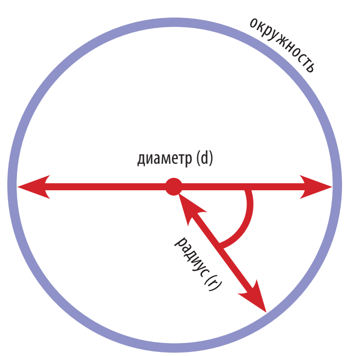
Геометрия изучает линии, углы, двумерные фигуры и трехмерные тела, площади и объемы, а также движения в пространстве (такие как повороты и отражения) и координаты.



△ **Углы**
Угол образуется двумя лучами, исходящими из одной точки. Величина угла, т. е. разворот между лучами, измеряется в градусах.



△ **Параллельные прямые**
Две прямые называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

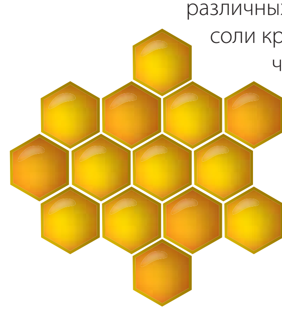


△ **Окружность**
Окружность — множество всех точек плоскости, находящихся на одном и том же расстоянии от данной точки (центра окружности). Круг — часть плоскости, ограниченная окружностью. Диаметр — отрезок, соединяющий две точки окружности и проходящий через ее центр. Радиус — отрезок от центра до любой точки окружности.

МИР ВОКРУГ НАС

Геометрия в природе

Хотя многие и считают геометрию исключительно математическим предметом, геометрические фигуры довольно часто встречаются в природе. Самые известные из них — это ячейки пчелиных сот и снежинки. Но в действительности примеров гораздо больше. Так, капли воды, мыльные пузыри и планеты похожи на шары. Кристаллы имеют форму различных многогранников: у поваренной соли кристаллы кубические, а кварц часто образует кристаллы в форме шестигранной призмы с пирамидами на верхней и нижней гранях.

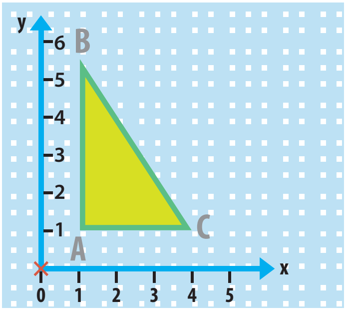


◁ **Ячейки пчелиных сот**
Ячейки сот представляют собой правильные шестиугольники, плотно прилегающие друг к другу без малейших зазоров.

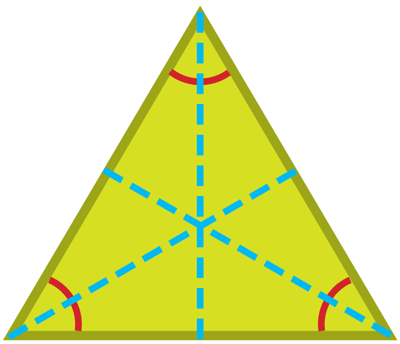
РАЗБИРАЕМ ДЕТАЛИ

Графики и геометрия

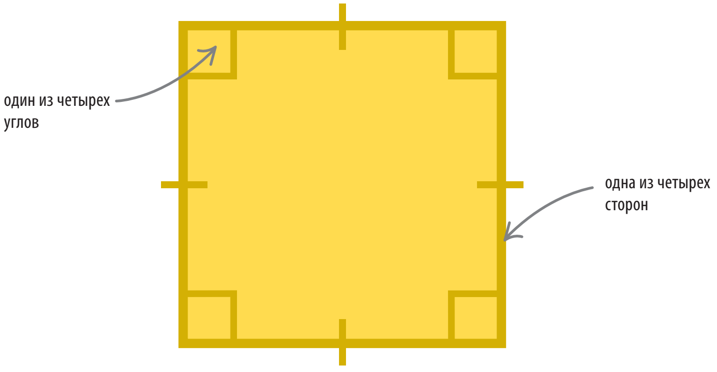
Графики связывают геометрию с другими разделами математики. Изображение линий и фигур на графике с координатами позволяет преобразовывать их в алгебраические выражения, с которыми потом можно выполнять различные действия. Верно и обратное: алгебраические выражения можно изображать на графиках, а затем преобразовывать их по правилам геометрии. Графическое представление объектов позволяет точно указывать их положение в пространстве и вычислять результаты их перемещений, таких как повороты и переносы.



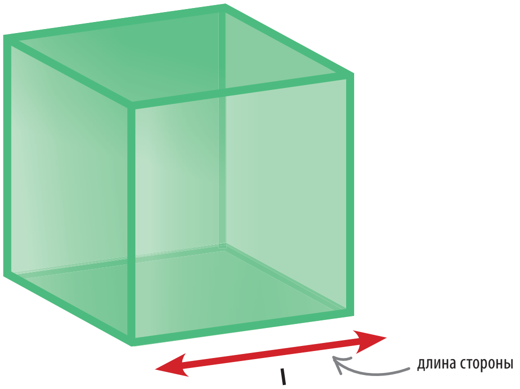
◁ **График**
Здесь на графике изображен прямоугольный треугольник ABC. Его вершины имеют координаты: A (1; 1); B (1; 5,5); C (4; 1).



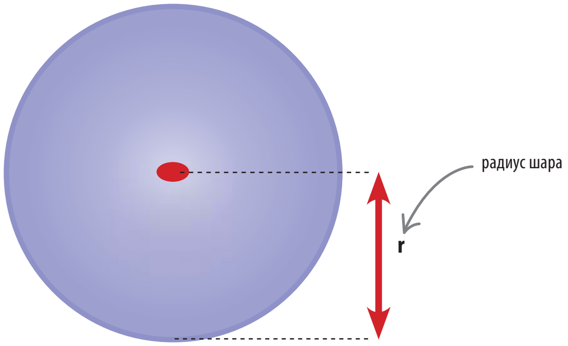
△ **Треугольник**
Треугольник — это многоугольник с тремя вершинами и тремя сторонами. Сумма внутренних углов треугольника равна 180°.



△ **Квадрат**
Квадрат — это многоугольник с четырьмя вершинами и четырьмя сторонами. Все его стороны равны между собой, а все четыре внутренних угла прямые (90°).



△ **Куб**
Куб — это правильный многогранник, каждая грань которого представляет собой квадрат. Куб имеет 6 граней, 12 ребер и 8 вершин.

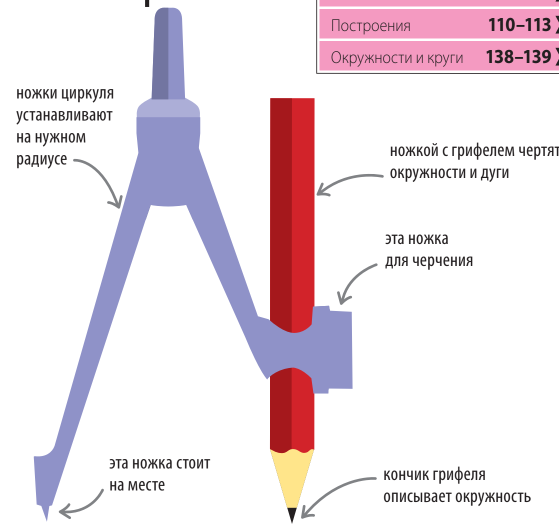


△ **Шар**
Шар — это геометрическое тело, у которого все точки поверхности находятся на одном расстоянии от центра; это расстояние называется радиусом шара.

Инструменты геометрии

СМ. ТАКЖЕ
Углы 84–85 ❯
Построения 110–113 ❯
Окружности и круги 138–139 ❯

ДЛЯ ЧЕРЧЕНИЯ И ИЗМЕРЕНИЯ В ГЕОМЕТРИИ ИСПОЛЬЗУЮТ СПЕЦИАЛЬНЫЕ ИНСТРУМЕНТЫ.



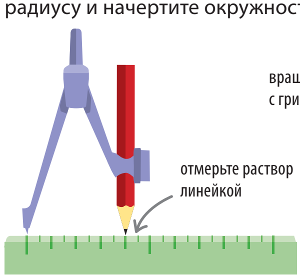
Инструменты в геометрии

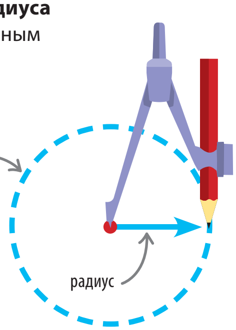
Инструменты необходимы для точного измерения и построения геометрических фигур. Основными инструментами являются линейка, циркуль и транспортир. Линейка служит для измерения отрезков и черчения прямых линий. Циркуль применяется для черчения окружностей и их частей, называемых дугами. Транспортир нужен для измерения и черчения углов.

Циркуль

Это инструмент для черчения окружностей и дуг. Он состоит из двух ножек, соединенных шарниром. Для черчения устанавливаем на бумаге ножку с иглой и вращаем ножку с грифелем. Позиция ножки с иглой будет центром окружности.

▽ **Черчение окружности данного радиуса**
Установите раствор ножек циркуля равным радиусу и начертите окружность.

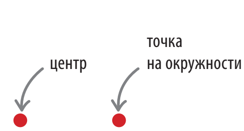


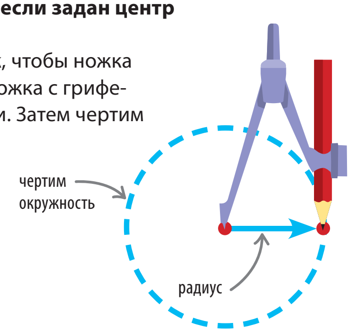


С помощью линейки устанавливаем необходимый раствор циркуля.

С помощью циркуля чертим окружность, вращая ножку с грифелем.

▽ **Черчение окружности, если задан центр и одна из ее точек**
Устанавливаем циркуль так, чтобы ножка с иглой попала в центр, а ножка с грифелем — на точку окружности. Затем чертим окружность.

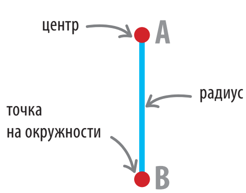


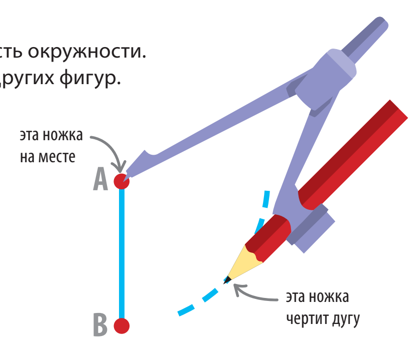


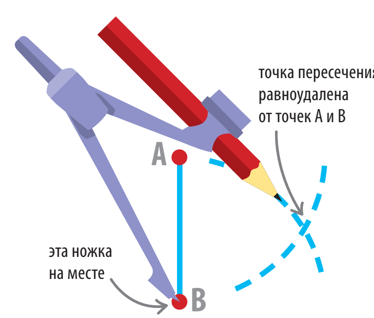
Подбираем раствор циркуля.

Прижимаем грифель к бумаге и чертим окружность.

▽ **Черчение дуг**
Иногда требуется начертить дугу, т. е. часть окружности. Дуги часто используют для построения других фигур.







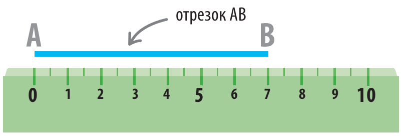
Начертим отрезок: один из его концов будет центром дуги, а второй — точкой на окружности.

Поставим ножки циркуля на концы отрезка и начертим первую дугу.

Начертим вторую дугу, поменяв ножки циркуля местами. Точка пересечения будет на одном расстоянии от A и B.

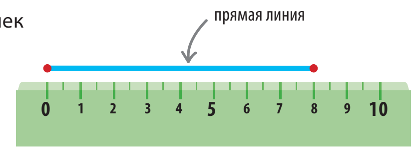
Линейка

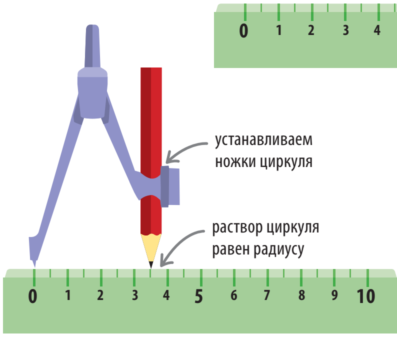
Линейка позволяет измерять длины отрезков и расстояния между любыми двумя точками. Кроме того, она нужна, чтобы точно выставить раствор циркуля.



◁ **Измерение отрезков**
Линейку используют для измерения отрезков и расстояний между двумя точками.

▷ **Черчение отрезков**
Линейку также используют для соединения двух точек отрезком прямой.





◁ **Раствор циркуля**
Используйте линейку для того, чтобы устанавливать раствор ножек циркуля равным радиусу.

Прочие инструменты

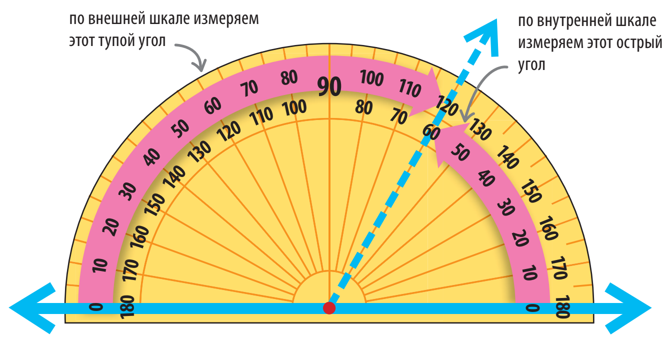
Также для построения чертежей и диаграмм вам пригодятся угольник и калькулятор.

△ **Угольник**
Это чертежный инструмент в форме прямоугольного треугольника, который используется для черчения параллельных прямых. Есть два типа угольников: у одного внутренние углы 90°, 45° и 45°, у другого 90°, 60° и 30°.

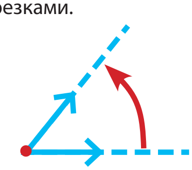
△ **Калькулятор**
На инженерных калькуляторах есть кнопки для геометрических вычислений.

Транспортир

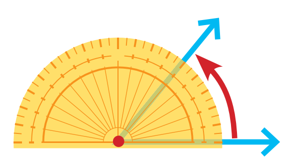
Транспортир предназначен для измерения и черчения углов. Обычно он сделан из прозрачной пластмассы, чтобы было легче совмещать центр транспортира с вершиной угла. Углы измеряют по шкале в градусах (начинается с нуля).



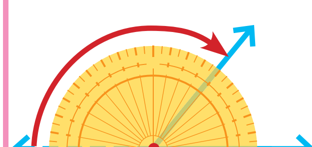
▽ **Измерение углов**
Пользуйтесь транспортиром для измерения углов между любыми двумя отрезками.



Продлите стороны угла, если нужно.



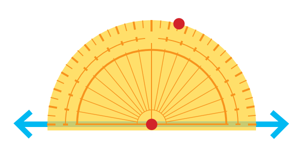
Прижмите транспортир к углу и прочтите значение на внутренней шкале.



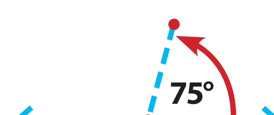
Вторая шкала показывает величину внешнего угла.

▽ **Черчение углов**
Если величина угла известна, то его можно начертить с помощью транспортира.

Чертим прямую и отмечаем на ней точку.



Совмещаем центр транспортира с этой точкой. Находим нужную величину угла на шкале и отмечаем вторую точку.



Чертим отрезок, соединяющий две точки. Нужный угол построен.

Углы

УГОЛ — ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФИГУРА, ОБРАЗОВАННАЯ ДВУМЯ ЛУЧАМИ, ИСХОДЯЩИМИ ИЗ ОДНОЙ ТОЧКИ.

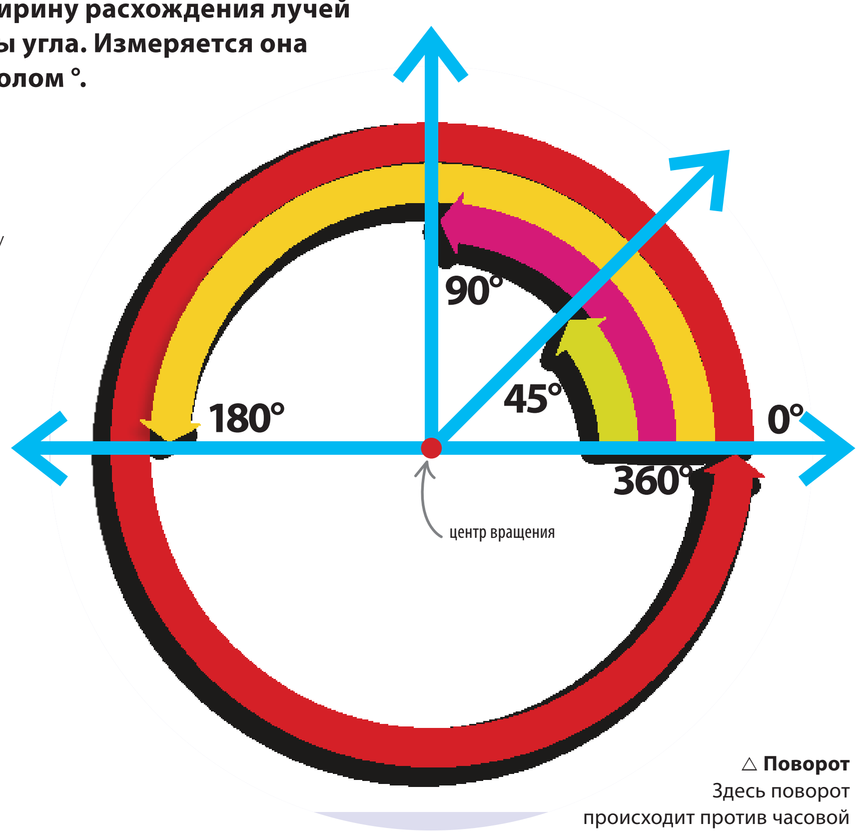
СМ. ТАКЖЕ
❮ 82–83 Инструменты геометрии
Прямые линии 86–87 ❯
Азимуты 108–109 ❯

Величина угла характеризует ширину расхождения лучей по мере их удаления от вершины угла. Измеряется она в градусах, обозначаемых символом °.

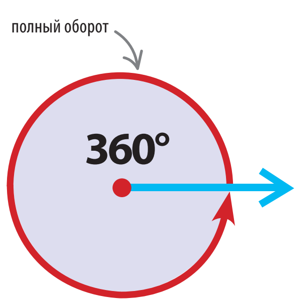
Измерение углов

Величина угла зависит от ширины его разворота. Угол, соответствующий полному обороту по окружности, равен 360°. Все остальные углы меньше 360°.

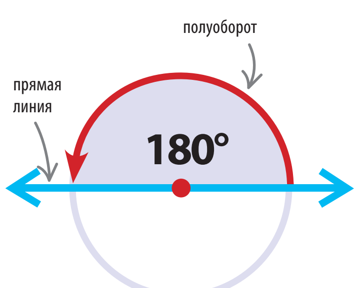
△ **Составные части угла**
Пространство между двумя лучами — это и есть сам угол. Угол может быть обозначен буквой, величиной в градусах или символом ∠.



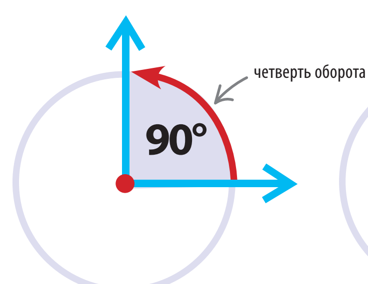
△ **Поворот**
Здесь поворот происходит против часовой стрелки, но возможен поворот и по часовой стрелке.



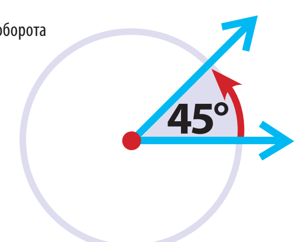
△ **Полный оборот**
Угол полного оборота равен 360°. В результате такого вращения второй луч совпадает с первым.



△ **Полуоборот**
Угол в половину полного оборота равен 180°. Два его луча образуют прямую линию. Такой угол называется развернутым.



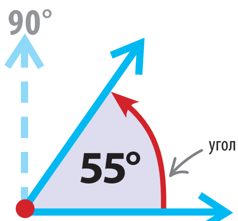
△ **Четверть оборота**
Угол в четверть полного оборота равен 90°. Два его луча перпендикулярны. Такой угол называется прямым.



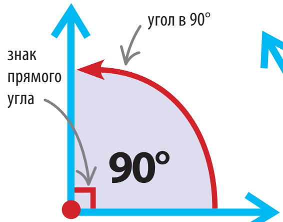
△ **Одна восьмая оборота**
Угол в одну восьмую полного оборота равен 45°. Это половина прямого угла. Восемь таких углов равны полному обороту.

Виды углов

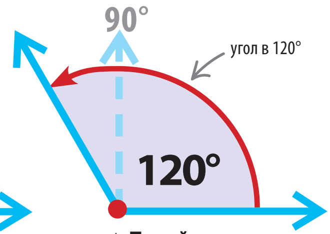
В зависимости от величины все углы делятся на четыре вида.



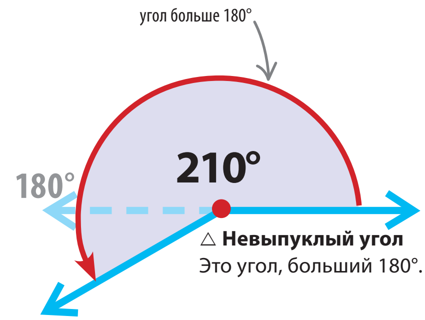
△ **Острый угол**
Это угол, меньший 90°.



△ **Прямой угол**
Это угол, равный 90°.



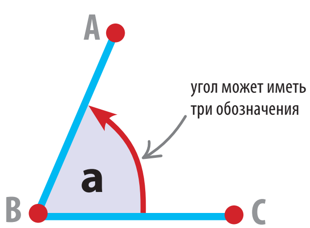
△ **Тупой угол**
Это угол, больший 90° и меньший 180°.



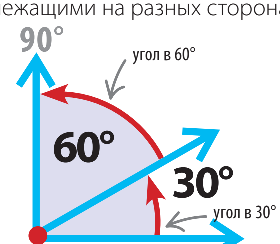
△ **Невыпуклый угол**
Это угол, больший 180°.

Обозначения углов

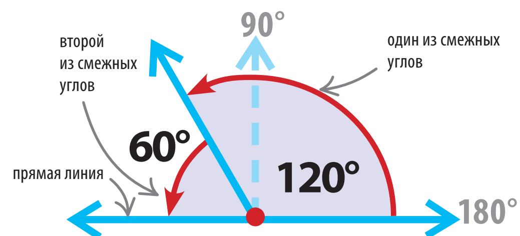
Углы обозначаются либо отдельными буквами (обычно строчными греческими), либо тремя точками (вершиной и точками, лежащими на разных сторонах угла).



△ **Один угол, три имени**
Этот угол может быть обозначен буквой *a*, ∠*ABC* или ∠*CBA*.



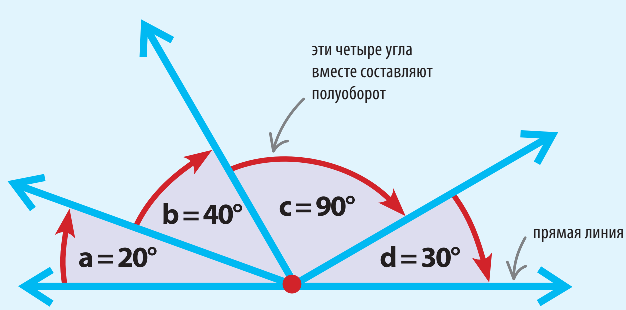
△ **Дополнительные углы**
Два угла, равные в сумме 90°, называются дополнительными.



△ **Смежные углы**
Два угла, равные в сумме 180°, называются смежными.

Углы на прямой линии

Углы на прямой линии составляют в сумме полуоборот, т. е. 180°. В примере ниже показаны четыре таких угла.

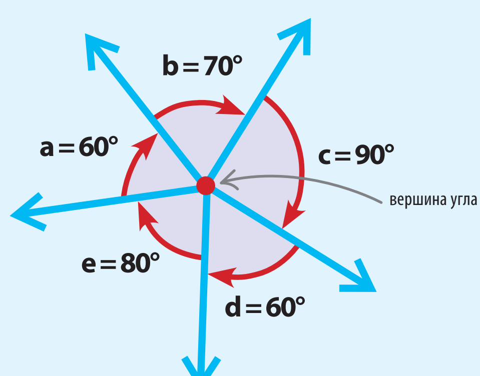


a + b + c + d = 180°

20° + 40° + 90° + 30° = 180°

Углы с общим центром

Углы, имеющие общий центр, составляют в сумме полный оборот, т. е. 360°. В примере ниже показано пять таких углов.



a + b + c + d + e = 360°

60° + 70° + 90° + 60° + 80° = 360°

Прямые линии

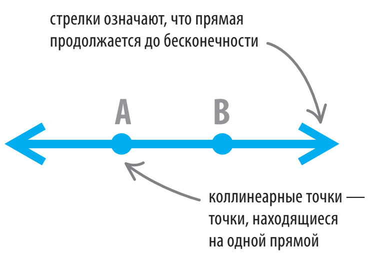
ПРЯМАЯ ЛИНИЯ (ИЛИ ПРОСТО ПРЯМАЯ) — ЭТО КРАТЧАЙШИЙ ПУТЬ МЕЖДУ ДВУМЯ ТОЧКАМИ НА ПЛОСКОСТИ ИЛИ В ПРОСТРАНСТВЕ.

СМ. ТАКЖЕ
❮ 82–83 Инструменты геометрии
❮ 84–85 Углы
Построения 110–113 ❯

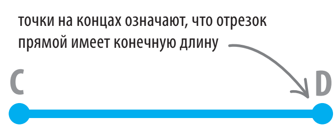
Точки, прямые и плоскости

Основными объектами геометрии являются точки, прямые и плоскости. Точка обозначает конкретное место в пространстве. Она не имеет ширины, высоты или длины. Прямая одномерна, она имеет бесконечную длину, продолжаясь в двух направлениях. Плоскость — это плоская двумерная поверхность, которая бесконечно продолжается во всех направлениях.

△ **Точки**
Это простейшие фигуры в геометрии. Обозначаются прописными буквами.



△ **Прямые**
В этой книге мы изображаем прямую линией со стрелками на концах, означающими, что прямая продолжается до бесконечности в обоих направлениях. Линия может быть обозначена двумя точками на ней (здесь прямая *AB*) или строчной латинской буквой.



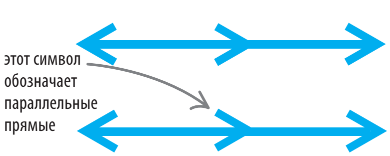
△ **Отрезки прямых**
Отрезок прямой имеет конечную длину, поэтому его концы обозначаются точками, а не стрелками. Он обозначается своими концевыми точками — здесь отрезок *CD*.

△ **Плоскости**
Плоскость обычно изображается как двумерная фигура и обозначается прописной буквой. Хотя мы и рисуем границы, плоскость продолжается во всех направлениях до бесконечности.

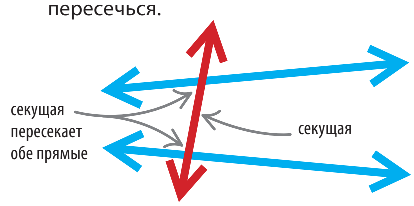
Несколько прямых

Две прямые на поверхности или плоскости либо пересекаются, т. е. имеют общую точку, либо параллельны. Если две прямые находятся на постоянном расстоянии друг от друга и никогда не пересекутся при их продолжении, то они параллельны.

△ **Непараллельные прямые**
Расстояние между непараллельными прямыми не является постоянным. При их продолжении они должны где-то пересечься.



△ **Параллельные прямые**
Параллельными являются две и более прямые, которые не пересекутся друг с другом при любом их продолжении. Для указания на параллельность используют стрелки.

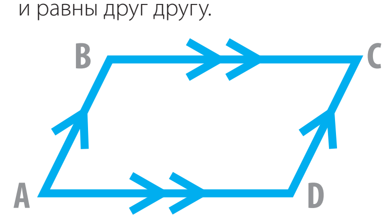


△ **Секущая**
Прямая, которая пересекает две и более прямые, называется секущей.

РАЗБИРАЕМ ДЕТАЛИ

Параллелограммы

Параллелограмм — это четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны и равны друг другу.

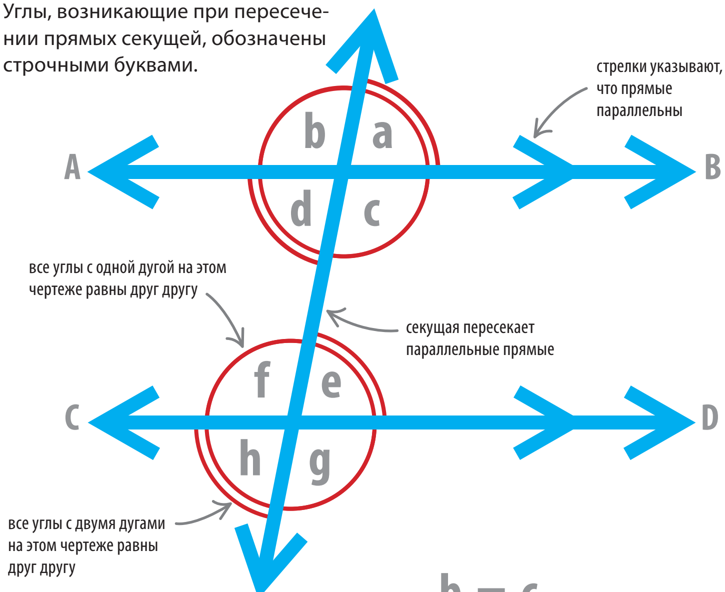


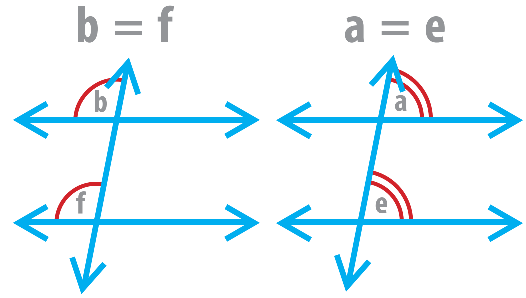
△ **Параллельные стороны**
Здесь стороны *AB* и *DC* параллельны, как и стороны *BC* и *AD*. Стороны *AB* и *BC* непараллельны, как и стороны *AD* и *CD* — это показано на рисунке двумя разными парами стрелок.

Углы и параллельные прямые

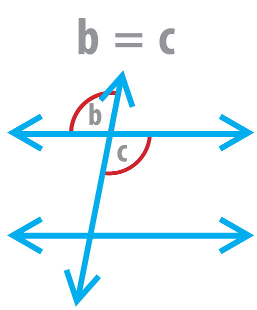
При пересечении двух параллельных прямых секущей образуются разные пары углов, которые имеют свои названия и свойства.

▽ **Обозначения углов**
Прямые *AB* и *CD* параллельны. Углы, возникающие при пересечении прямых секущей, обозначены строчными буквами.

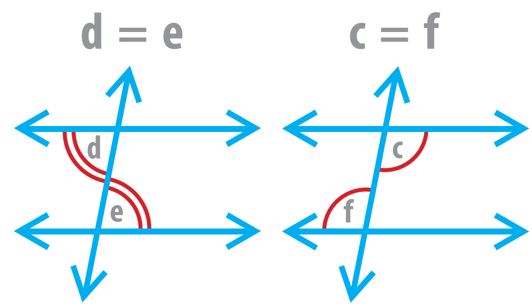




△ **Соответственные углы**
Это углы, которые образуются при пересечении двух параллельных прямых секущей и лежат по одну сторону от секущей, причем один из них расположен между прямыми, а другой нет. Соответственные углы равны между собой.



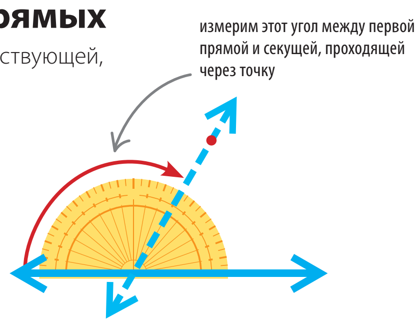
▷ **Вертикальные углы**
Это углы, которые образуются при пересечении двух прямых и лежат друг напротив друга. Вертикальные углы равны между собой.

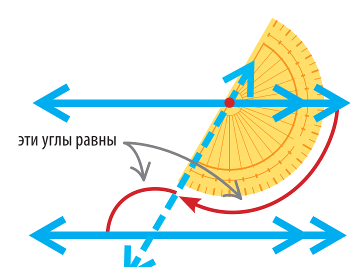


△ **Накрест лежащие углы**
Накрест лежащие углы возникают во внутренней области параллельных прямых по разные стороны от секущей, пересекающей эти параллельные прямые. Они равны между собой.

Черчение параллельных прямых

Для черчения прямой, параллельной уже существующей, нужны карандаш, линейка и транспортир.





Начертим прямую с помощью линейки. Отметим точку второй прямой на некотором расстоянии от первой.

Начертим прямую, которая проходит через точку и пересекает первую прямую. Измерим угол, образованный двумя прямыми.

Отложим такой же угол от секущей и отметим точку. Начертим с помощью линейки новую прямую, проходящую через нее. Эта прямая будет параллельна первой.

Симметрия

СУЩЕСТВУЮТ ДВА ТИПА СИММЕТРИИ — ЗЕРКАЛЬНАЯ И ВРАЩАТЕЛЬНАЯ.

СМ. ТАКЖЕ

❮ 86–87 Прямые линии

Повороты 100–101 ❯

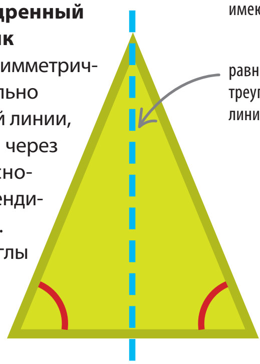
Отражения 102–103 ❯

Фигура симметрична, если можно провести прямую, которая разобьет ее на две одинаковые части, или если ее можно повернуть так, чтобы она совпала сама с собой.

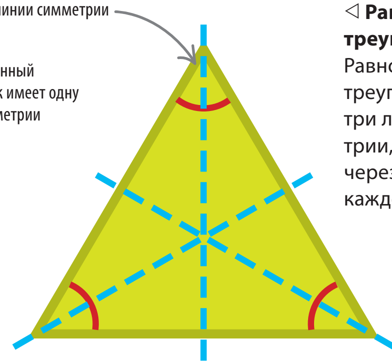
Зеркальная симметрия

Плоская фигура обладает зеркальной симметрией, если ее половины, образованные пересекающей прямой, являются зеркальными отражениями друг друга. Пересекающая прямая в этом случае называется линией симметрии.

▷ **Равнобедренный треугольник**
Эта фигура симметрична относительно центральной линии, проходящей через середину основания перпендикулярно ему. Стороны и углы в каждой половине фигуры равны между собой.



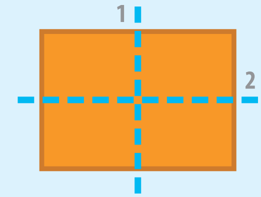
Равнобедренный треугольник



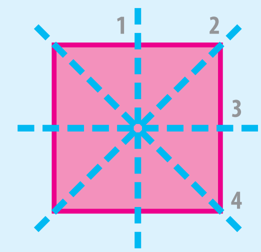
Равносторонний треугольник

◁ **Равносторонний треугольник**
Равносторонний треугольник имеет три линии симметрии, проходящие через середину каждой из сторон.

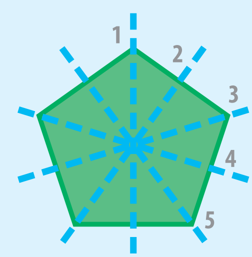
▽ **Линии симметрии**
Ниже показаны линии симметрии некоторых плоских фигур. Окружности имеют бесконечно много линий симметрии.



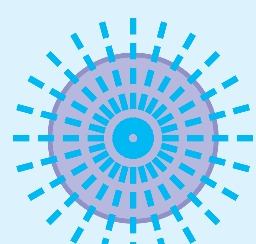
Линии симметрии прямоугольника



Линии симметрии квадрата



Линии симметрии правильного пятиугольника



Любая прямая, проходящая через центр окружности, является линией ее симметрии

Плоскости симметрии

Трехмерные фигуры (тела) могут быть разрезаны плоскостями. Тело имеет зеркальную симметрию, если половины, образованные плоскостью, являются зеркальными отражениями друг друга.

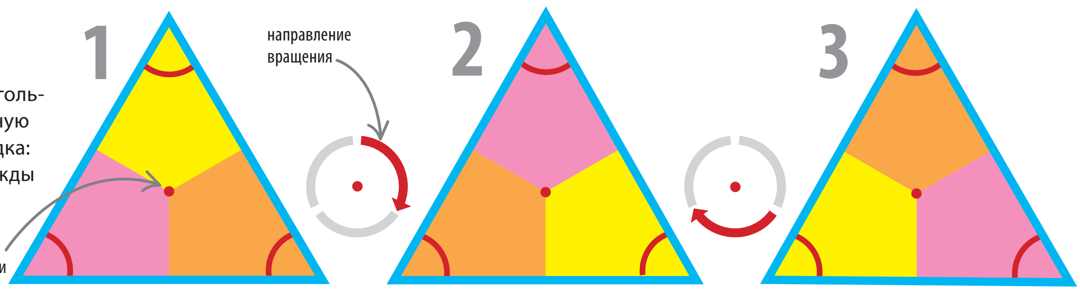
▽ **Прямоугольный параллелепипед**
Прямоугольный параллелепипед, образованный тремя парами прямоугольников, может быть разрезан на зеркальные половины тремя способами.

◁ **Прямоугольная пирамида**
Пирамида с прямоугольным основанием и треугольными гранями может быть разрезана на зеркальные половины двумя способами.

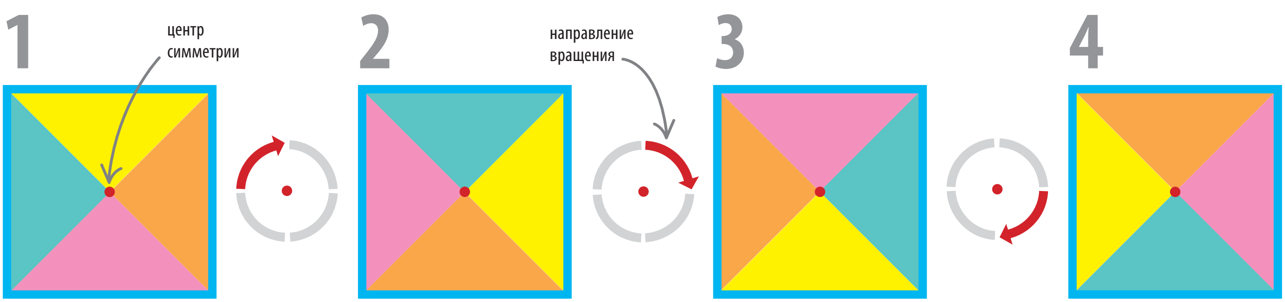
Вращательная симметрия

Плоская фигура обладает вращательной симметрией, если ее можно повернуть вокруг некоторой точки (называемой центром симметрии) так, что она совпадет сама с собой. Количество таких поворотов называется «порядком» вращательной симметрии.

▷ **Равносторонний треугольник**
Равносторонний треугольник имеет вращательную симметрию 3-го порядка: при вращении он трижды совпадет с собой.



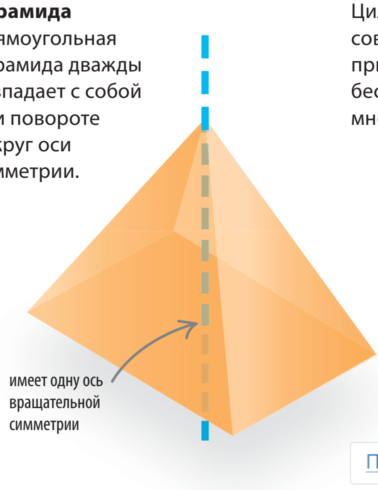
▽ **Квадрат**
Квадрат имеет вращательную симметрию 4-го порядка: при вращении он четырежды совпадет с собой.



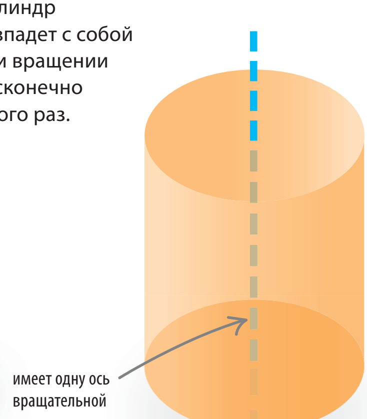
Оси симметрии

Если двумерные фигуры вращаются вокруг точки, то трехмерные — вокруг прямой, называемой осью симметрии. Тело обладает вращательной симметрией, если при повороте оно совпадет с собой.

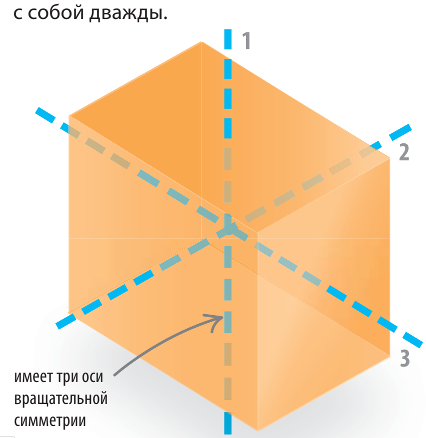
▽ **Прямоугольная пирамида**
Прямоугольная пирамида дважды совпадает с собой при повороте вокруг оси симметрии.



▽ **Цилиндр**
Цилиндр совпадет с собой при вращении бесконечно много раз.



▽ **Прямоугольный параллелепипед**
Прямоугольный параллелепипед можно вращать вокруг любой из трех его осей. При этом он совпадет с собой дважды.



Координаты

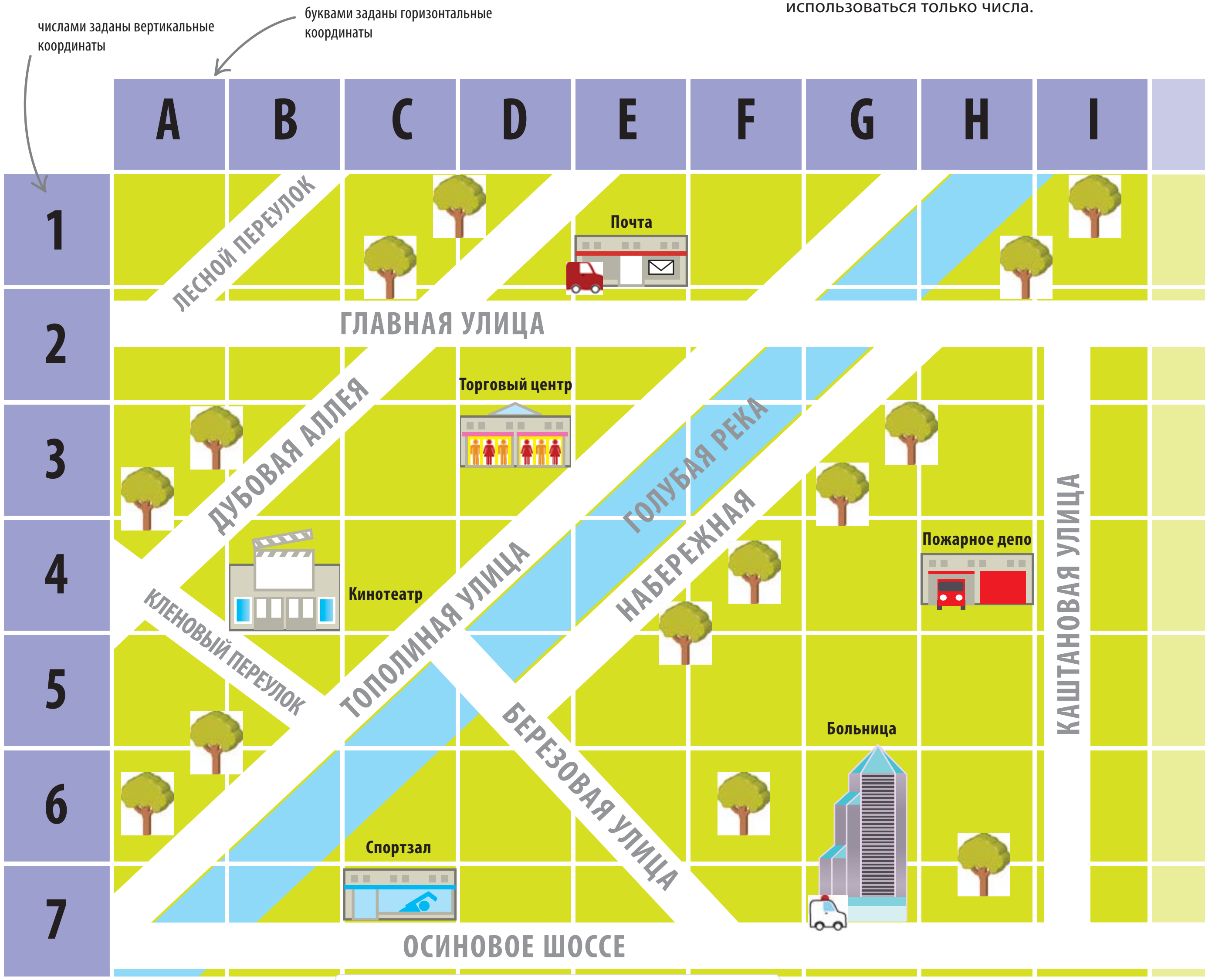
КООРДИНАТЫ ЗАДАЮТ ПОЛОЖЕНИЕ ТОЧКИ НА КАРТЕ ИЛИ ГРАФИКЕ.

СМ. ТАКЖЕ
Векторы 94–97
Линейная функция и ее график 182–185

Знакомство с координатами

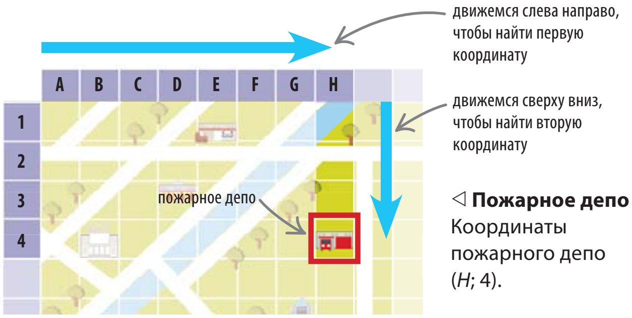
Координаты — это пары чисел или букв. Они всегда записываются в круглых скобках через точку с запятой. Порядок координат в паре очень важен. В нашем примере (*E*; 1) означает такую позицию на карте: четыре шага по горизонтали слева направо и один шаг по вертикали сверху вниз.

▽ **Карта города**
Ниже показана карта города, разбитая на квадраты. Каждый квадрат имеет две координаты — горизонтальную и вертикальную. Мы обозначили горизонтальные координаты буквами, а вертикальные — числами. На других картах могут использоваться только числа.

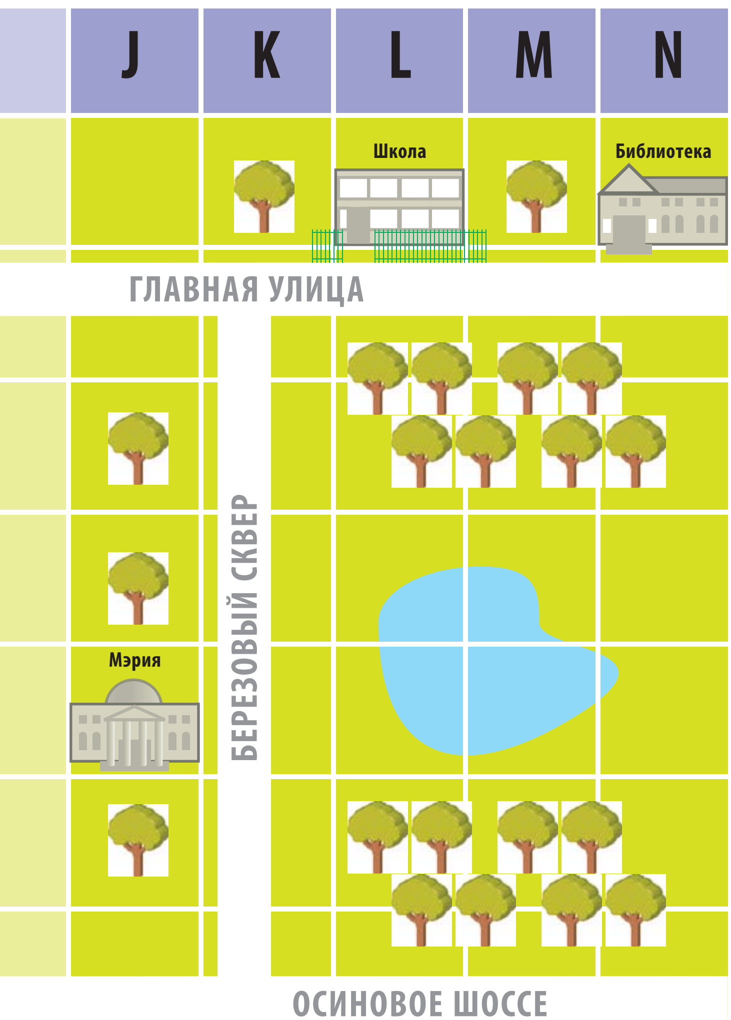


Чтение карты

Горизонтальная координата всегда указывается первой, а вертикальная — второй. На нашей карте пара из буквы и цифры образует координаты квадрата.

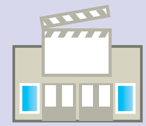


◁ **Пожарное депо**
Координаты пожарного депо (*H*; 4).



Пользование координатами

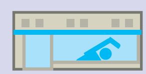
Любое интересующее нас место на карте можно найти по его координатам. Помните, что сначала идет координата по горизонтали, а потом по вертикали.



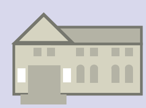
◁ **Кинотеатр**
Найдем кинотеатр по его координатам (*B*; 4). Начнем с квадрата *A* и сделаем шаг вправо, а потом 4 шага вниз.

◁ **Почта**
Координаты почты (*E*; 1). Найдем по горизонтали координату *E* и сделаем шаг вниз.

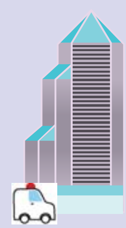
◁ **Мэрия**
Найдем мэрию по ее координатам (*J*; 5). Начнем с квадрата *A* и сделаем 9 шагов вправо, а потом 5 шагов вниз.



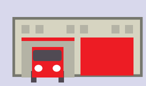
◁ **Спортзал**
По координатам (*C*; 7) найдем спортзал. Сначала найдем *C*. Потом найдем 7 по вертикали.



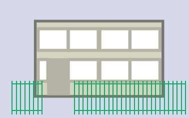
◁ **Библиотека**
Координаты библиотеки (*N*; 1). Найдем по горизонтали координату *N* и сделаем шаг вниз.



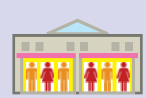
◁ **Больница**
Больницу можно найти по ее координатам (*G*; 7). Чтобы найти *G*, сделаем 6 шагов вправо. Потом 6 шагов вниз до координаты 7.



◁ **Пожарное депо**
Найдем пожарное депо по его координатам (*H*; 4). Сделаем 7 шагов вправо до *H*, а потом 4 шага вниз.



◁ **Школа**
Координаты школы (*L*; 1). Сначала найдем *L*, потом сделаем шаг вниз.

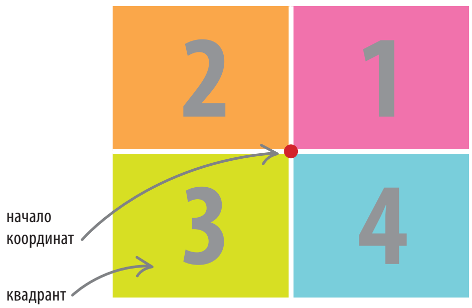


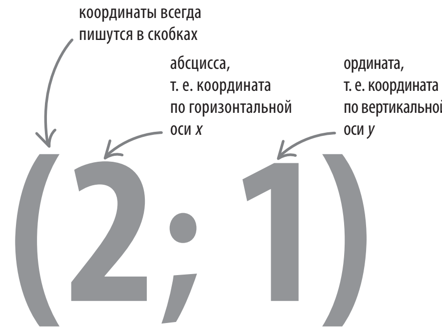
◁ **Торговый центр**
По координатам (*D*; 3) найдем, где находится торговый центр. Находим *D*. Затем находим 3 по вертикали.

Координаты графиков

Координаты задают положение точек на графиках относительно двух осей: вертикальной оси *y* (ось ординат) и горизонтальной оси *x* (ось абсцисс). Координаты точки записываются как пара чисел (*x; y*).

▷ **Четыре квадранта**
Точка пересечения осей (0) называется началом координат. Две оси разбивают плоскость на четыре «квадранта». Выше и справа от начала координат значения по осям положительные, ниже и слева — отрицательные.





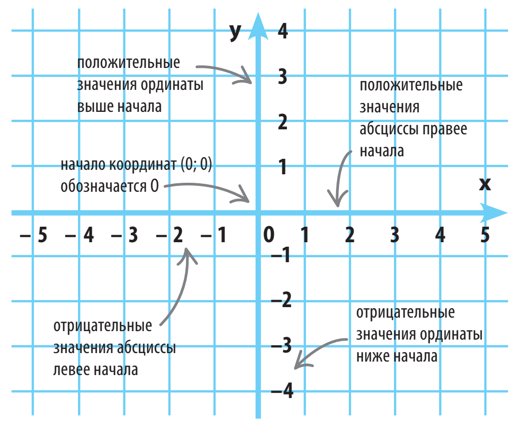
△ **Координаты точки**
Координаты задают положение точки относительно двух осей. Первое число — это позиция по оси *x*, вторая — по оси *y*.

Как рисовать точки по координатам

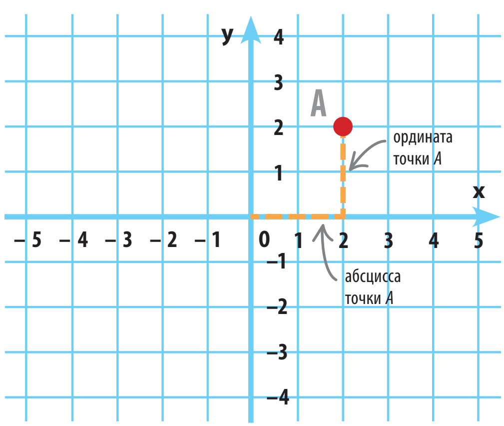
Точки рисуют на координатной плоскости. Чтобы нарисовать точку, откладываем ее первую координату по оси *x*, затем вторую координату по оси *y*.

A = (2; 2)   B = (–1; –3)
C = (1; –2)   D = (–2; 1)

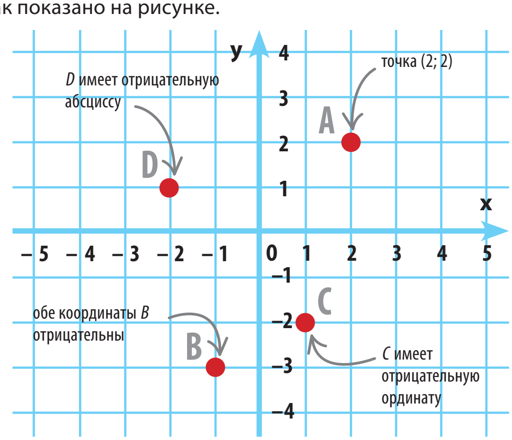
Вот четыре пары координат. Каждая имеет значения *x* и *y*. Нарисуем точки на плоскости.



▷ **На бумаге в клетку** начертим горизонтальную ось *x* и вертикальную ось *y*. Подпишем значения по осям, как показано на рисунке.



▷ **Чтобы нарисовать точку,** находим ее первую координату на оси *x*. Затем движемся по вертикали до второй координаты.



▷ **Рисуем все точки по очереди.** Отрицательные координаты по оси *x* откладываются влево от начала координат, а по оси *y* — вниз от него.

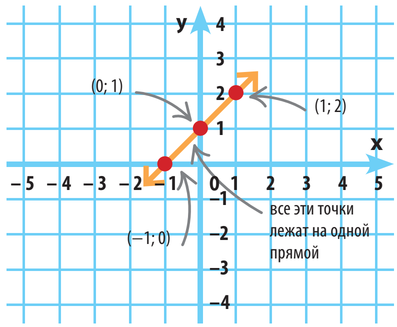
Уравнение прямой

Прямые линии на координатной плоскости можно задавать уравнениями. Например, у прямой с уравнением $y = x + 1$ каждая точка имеет ординату на 1 бо́льшую, чем x.

ордината

абсцисса

$$y = x + 1$$



Уравнение прямой можно найти по нескольким ее точкам. Здесь прямая проходит через точки (–1; 0), (0; 1) и (1; 2), поэтому ясно, какому правилу они соответствуют.

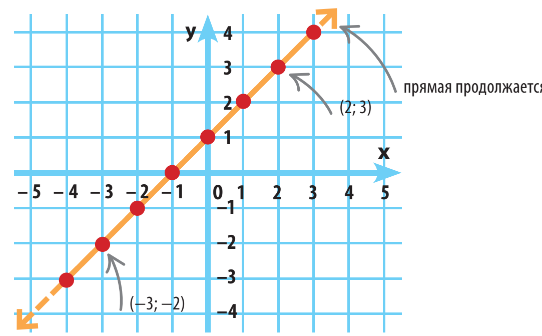
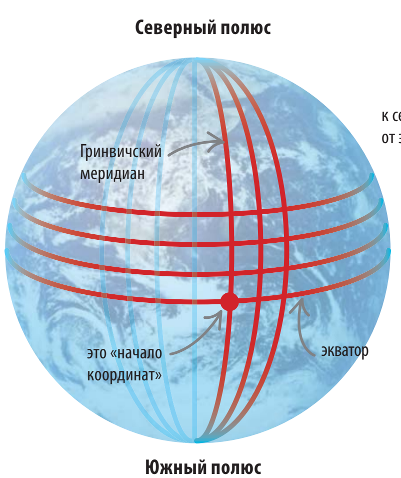


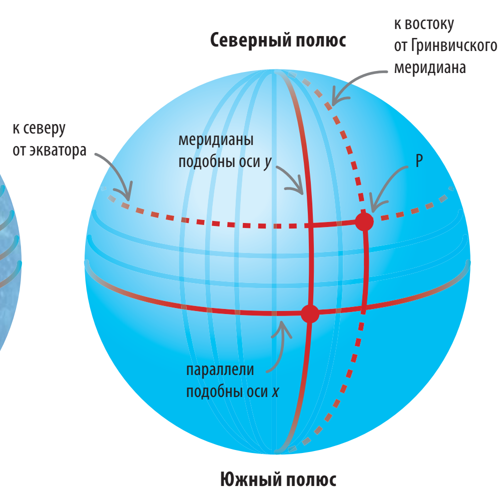
График этого уравнения — все точки, у которых ордината больше абсциссы на 1 (так как $y = x + 1$). Это значит, что, начертив прямую, мы можем найти все точки, удовлетворяющие уравнению.

Карта мира

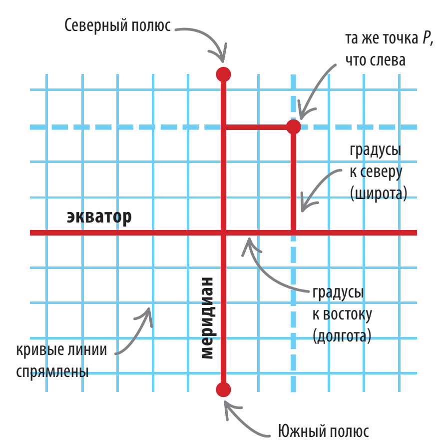
Для обозначения мест на поверхности Земли также используют координаты, называемые широтой и долготой. Они имеют тот же смысл, что оси x и y. Началом координат является точка, в которой Гринвичский меридиан (долгота 0°) пересекает экватор (широта 0°).



Меридианы идут от Северного полюса к Южному. Параллели идут перпендикулярно меридианам. Начало координат там, где Гринвичский меридиан (ось y) пересекает экватор (ось x).



Чтобы определить координаты точки *P* на карте, нужно узнать, на сколько градусов она восточнее Гринвичского меридиана и на сколько градусов севернее экватора.



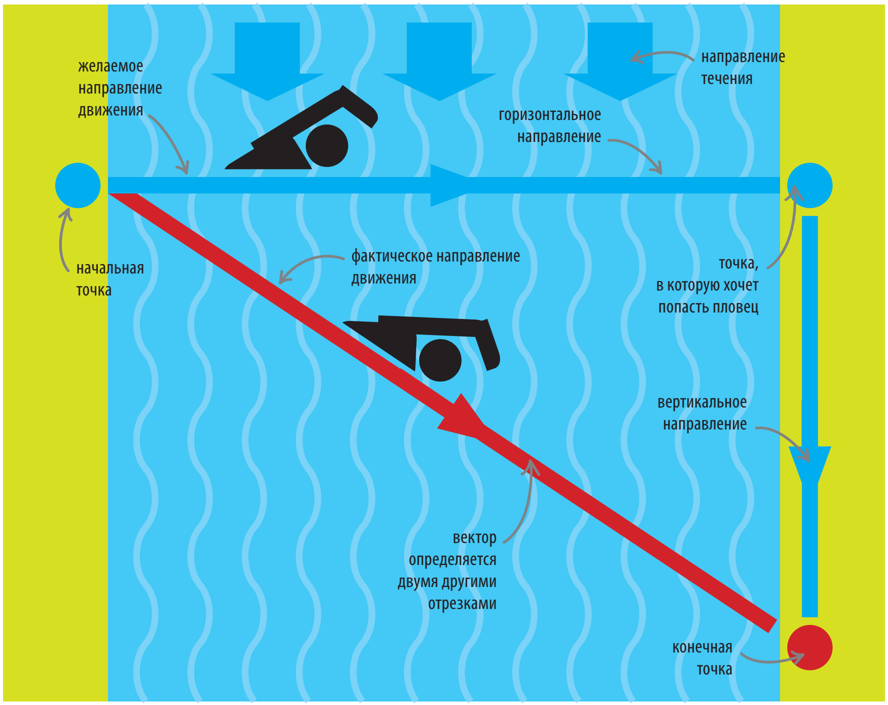
Здесь поверхность Земли показана как плоскость. Параллели и меридианы соответствуют осям: вертикальные оси показывают долготу, а горизонтальные — широту.

Векторы

ВЕКТОР — ЭТО ОТРЕЗОК ПРЯМОЙ, КОТОРЫЙ ИМЕЕТ ДЛИНУ И НАПРАВЛЕНИЕ.

СМ. ТАКЖЕ
❮ 90–93 Координаты
Параллельные переносы 98–99 ❯
Теорема Пифагора 128–129 ❯

Вектор позволяет изобразить движение в определенном направлении. Он часто рисуется как отрезок со стрелкой на конце. Длина отрезка показывает расстояние, а стрелка — направление.



Что такое вектор?

Вектор — это направленный отрезок. Часто вектор направлен по диагонали, т. е. является гипотенузой прямоугольного треугольника (с. 128–129). Две другие стороны треугольника определяют длину и направление вектора. В примере слева вектором является путь пловца. Две другие стороны треугольника — это ширина реки, направленная по горизонтали, и расстояние от точки, в которую целился пловец, до точки, куда он приплыл на самом деле.

◁ **Вектор пловца**
Человек хочет переплыть реку шириной 30 м. Пока он плывет, его сносит течением, и он выходит на берег в точке, которая на 20 м ниже по течению той точки, куда он хотел попасть. Его путь — это вектор с размерами 30 вперед и 20 вниз.

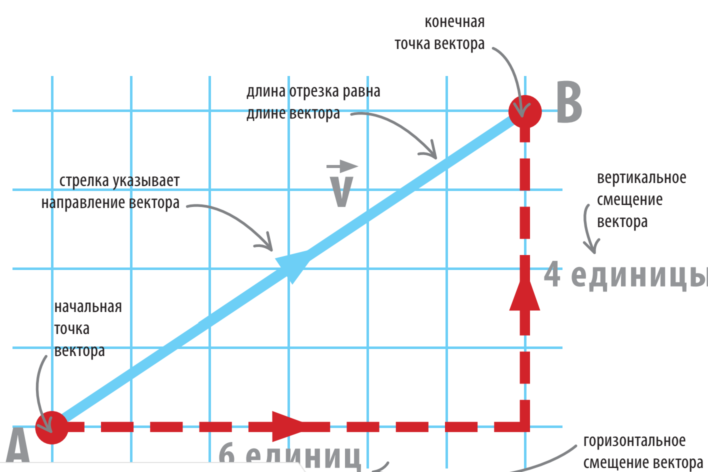
Запись векторов

На рисунках вектор изображается как отрезок со стрелкой на конце. Есть три способа символической записи векторов.

$\vec{a}$ = Векторы обычно обозначают одной строчной латинской буквой со стрелкой над ней.

$\overrightarrow{AB}$ = Другой вариант: указываем его начальную и конечную точки со стрелкой над ними.

$\binom{6}{4}$ = Длина и направление вектора могут быть записаны как смещение по горизонтали над смещением по вертикали



Направления векторов

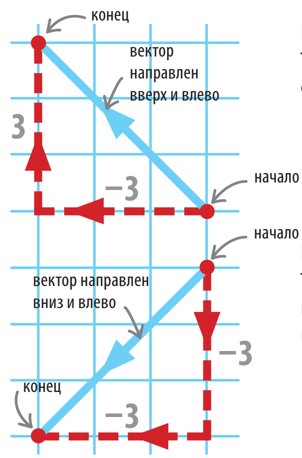
Направление вектора зависит от того, положительны или отрицательны его смещения. Положительное смещение по горизонтали означает движение вправо, отрицательное — влево. Положительное смещение по вертикали означает движение вверх, отрицательное — вниз.

▷ **Движение вверх и влево**
Такой вектор имеет отрицательное смещение по горизонтали и положительное по вертикали.

3 клетки влево
$\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$
3 клетки вверх

▷ **Движение вниз и влево**
Такой вектор имеет отрицательные смещения в обоих направлениях.

3 клетки влево
$\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$
3 клетки вниз

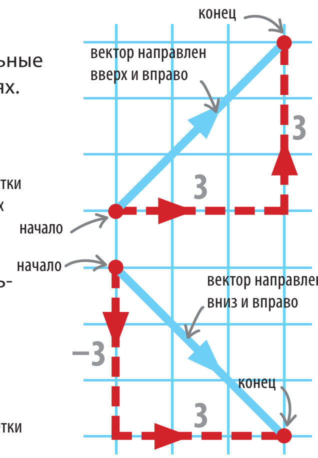


▷ **Движение вверх и вправо**
Такой вектор имеет положительные смещения в обоих направлениях.

3 клетки вправо
$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$
3 клетки вверх

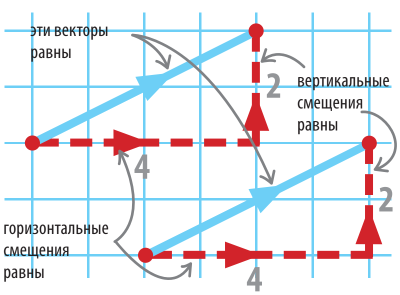
▷ **Движение вниз и вправо**
Такой вектор имеет положительное смещение по горизонтали и отрицательное по вертикали.

3 клетки вправо
$\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$
3 клетки вниз



Равные векторы

Два вектора равны между собой, если они имеют одинаковые смещения по горизонтали и вертикали.

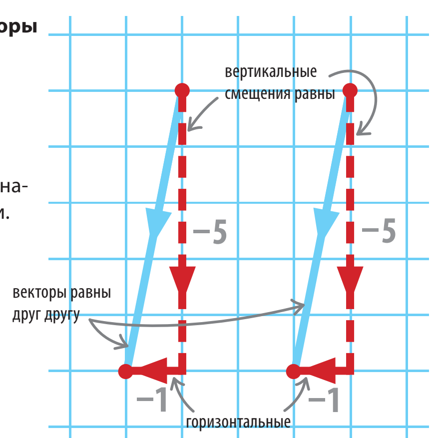


◁ **Равные векторы**
Эти два вектора равны, поскольку они имеют равные по величине смещения с одинаковыми знаками.

$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ вектор как два его смещения

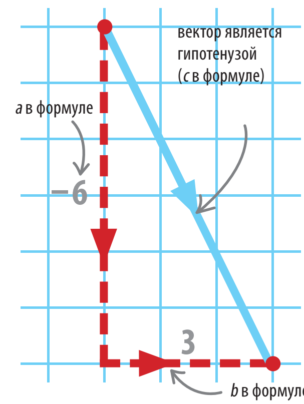
▷ **Равные векторы**
Эти два вектора тоже равны, поскольку они имеют равные по величине смещения с одинаковыми знаками.

$\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$
вектор как два его смещения



Длины векторов

Вектор является гипотенузой прямоугольного треугольника. Его длину можно найти с помощью теоремы Пифагора по двум другим сторонам.



формула теоремы Пифагора

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$-6^2 + 3^2 = c^2$$

Подставим в формулу вертикальное и горизонтальное смещения вектора.

$-6^2 = -6 \cdot (-6) = 36$

$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$

$$36 + 9 = c^2$$

Найдем квадраты сторон, умножая их на себя.

c^2 — квадрат длины вектора

$$45 = c^2$$

Сложим два квадрата. Сумма равна квадрату длины вектора ($\vec{c}^2$).

квадратный корень из 45

c — длина вектора

$$c = \sqrt{45}$$

С помощью калькулятора вычислим квадратный корень из 45.

длина вектора

$$c \approx 6{,}7$$

Результатом будет длина нашего вектора.

Сложение и вычитание векторов

Векторы можно складывать и вычитать двумя способами. Первый способ — сложение их вертикальных и горизонтальных смещений. Второй способ графический — чертим первый вектор, из его конца чертим второй и смотрим, что получилось в итоге.

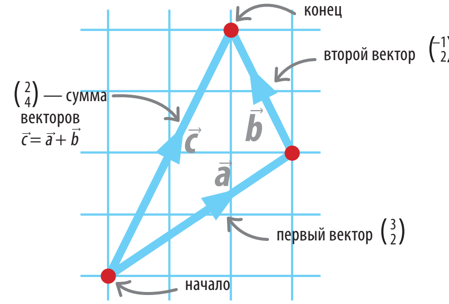
▷ **Сложение**
Векторы можно складывать двумя способами. Результат будет один и тот же.

первый вектор; второй вектор; $3 + (-1) = 2$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$2 + 2 = 4$

△ **Чтобы сложить два вектора** арифметически, складываем верхние числа (горизонтальные смещения) и нижние числа (вертикальные смещения).



△ **Графическое сложение**
Построим вектор $\vec{a}$. Из его конечной точки построим вектор $\vec{b}$. Суммой векторов $\vec{a} + \vec{b}$ будет вектор $\vec{c}$, который соединяет начало первого слагаемого вектора и конец второго.

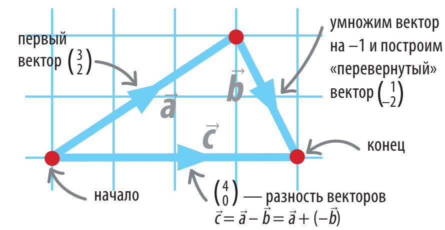
▷ **Вычитание**
Векторы можно вычитать двумя способами. Результат будет один и тот же.

первый вектор (уменьшаемое); второй вектор (вычитаемое); $3 - (-1) = 4$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$2 - 2 = 0$

△ **Чтобы вычесть два вектора** арифметически, вычитаем верхние числа (горизонтальные смещения) и нижние числа (вертикальные смещения).



△ **Графическое вычитание через сложение**
Построим первый вектор $\vec{a}$. Из его конечной точки проведем «перевернутый» (т. е. умноженный на −1) вектор $\vec{b}$. Ответом будет вектор $\vec{c}$, который соединит начало первого вектора и конец второго.

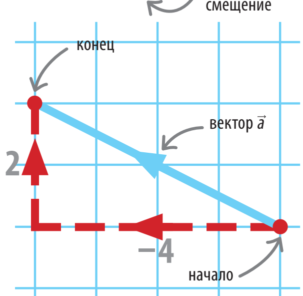
Умножение векторов

Векторы можно умножать на числа, но не на другие векторы. При умножении на положительное число направление вектора остается прежним, а при умножении на отрицательное число меняется на противоположное. Векторы можно умножать и графически, и арифметически.

▽ **Вектор $\vec{a}$**
Вектор $\vec{a}$ имеет смещения −4 по горизонтали и +2 по вертикали. Его можно записать как пару чисел или начертить, как показано ниже.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

горизонтальное смещение; вертикальное смещение



▽ **Вектор $\vec{a}$, умноженный на 2**
Для арифметического умножения умножим вертикальное и горизонтальное смещения на 2. Для графического умножения растянем исходный вектор, увеличив его в два раза.

вектор $\vec{a}$; $2 \cdot (-4) = -8$

$$2\vec{a} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$2 \cdot 2 = 4$

▽ **Вектор $\vec{a}$, умноженный на −½**
Для арифметического умножения умножим вертикальное и горизонтальное смещения на −½. Для графического умножения сожмем исходный вектор в два раза и сменим направление на противоположное.

вектор $\vec{a}$; $-½ \cdot (-4) = 2$

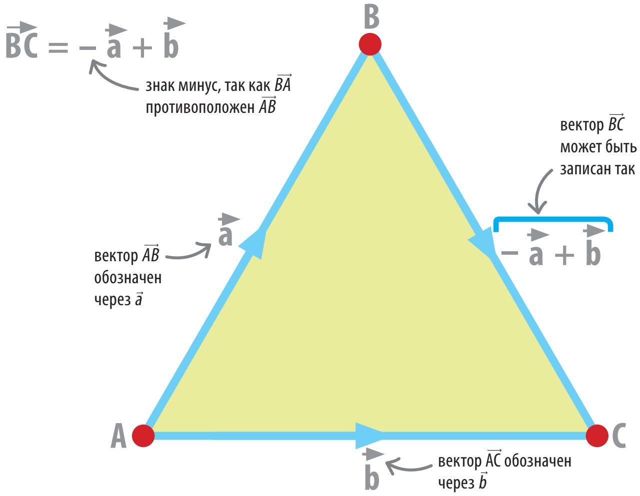
$$-\frac{1}{2}\vec{a} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$-½ \cdot 2 = -1$

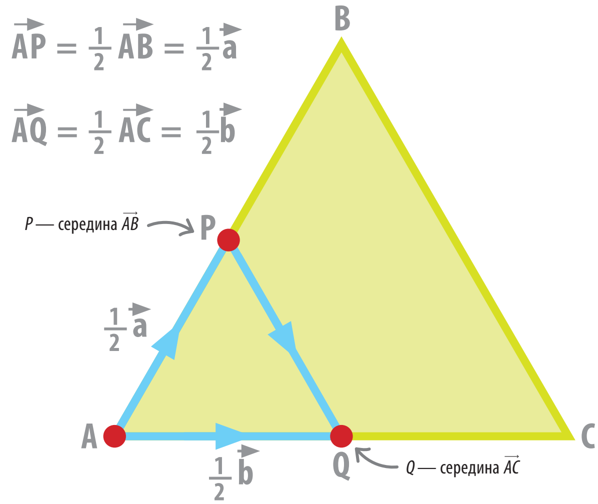
Использование векторов в геометрии

Векторы могут использоваться для геометрических доказательств. В нашем примере с помощью векторов докажем, что отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, параллелен третьей стороне и равен ее половине.

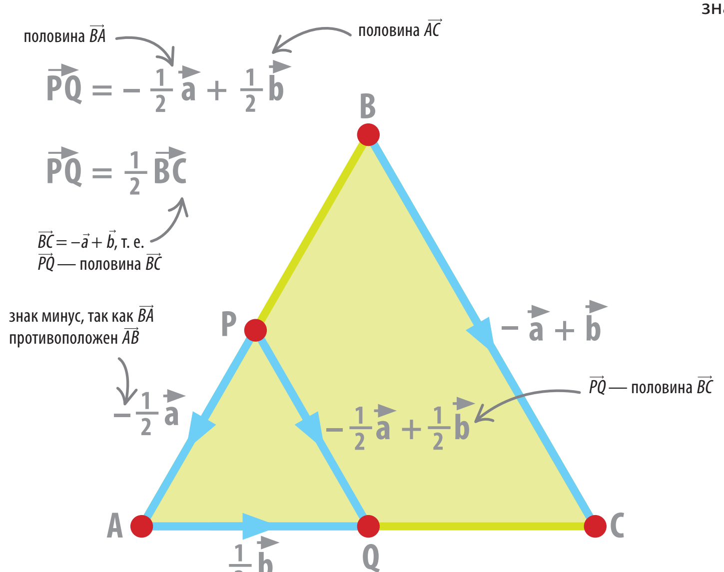
Сначала выберем две стороны треугольника *ABC*, например *AB* и *AC*. Обозначим их как векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Пройдем из точки *B* в точку *C* через точку *A*, т. е. по векторам $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{AC}$. $\overrightarrow{BA}$ — это вектор, противоположный вектору $\overrightarrow{AB}$. Отсюда $\overrightarrow{BC} = -\vec{a} + \vec{b}$.



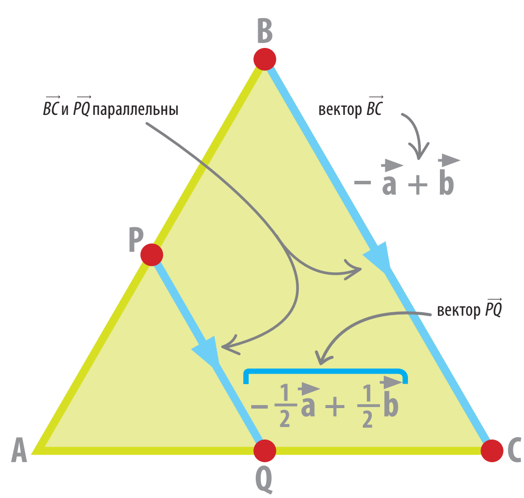
Теперь найдем середины выбранных сторон *AB* и *AC*. Обозначим их буквами *P* и *Q* соответственно. Так мы получили три новых вектора: $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AQ}$ и $\overrightarrow{PQ}$. $\overrightarrow{AP}$ равен половине вектора $\vec{a}$, $\overrightarrow{AQ}$ равен половине вектора $\vec{b}$.

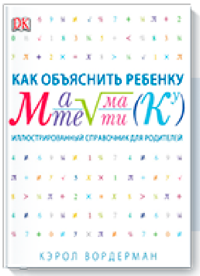


Теперь используем векторы $\frac{1}{2}\vec{a}$ и $\frac{1}{2}\vec{b}$, чтобы найти длину вектора $\overrightarrow{PQ}$. Пройдем из *P* в *Q* по векторам $\overrightarrow{PA}$ и $\overrightarrow{AQ}$. $\overrightarrow{PA} = -\frac{1}{2}\vec{a}$, так как он противоположен $\overrightarrow{AP}$, а $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\vec{b}$. Отсюда $\overrightarrow{PQ} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.



А теперь закончим доказательство. Векторы $\overrightarrow{PQ}$ и $\overrightarrow{BC}$ имеют одинаковое направление, следовательно, они параллельны. Значит, отрезок *PQ*, соединяющий середины сторон *AB* и *AC*, параллелен отрезку *BC*. Кроме того, вектор $\overrightarrow{PQ}$ равен половине вектора $\overrightarrow{BC}$, значит, и отрезок *PQ* равен половине отрезка *BC*.




КАК ОБЪЯСНИТЬ РЕБЕНКУ
ИЛЛЮСТРИРОВАННЫЙ СПРАВОЧНИК ДЛЯ РОДИТЕЛЕЙ
КЭРОЛ ВОРДЕРМАН