

Оглавление

Предисловие	11
Пролог	19
Введение.....	23
Глава 0. Быстрые трюки: простые (и впечатляющие) вычисления	25
Глава 1. Небольшой обмен любезностями: устное сложение и вычитание	35
Глава 2. Произведения растраченной юности: основы умножения	52
Глава 3. Усовершенствованные произведения: умножение среднего уровня.....	76
Глава 4. Разделяй и властвуй: деление в уме	101
Глава 5. Искусство приближенной оценки.....	128
Глава 6. Математика с ручкой и бумагой	154
Глава 7. Запоминающаяся глава для запоминания чисел.....	174

Глава 8. Сложное делаем легким: продвинутое умножение	187
Глава 9. Искусство математической магии.....	223
Глава ∞. Эпилог: как математика помогает задуматься о странных вещах	247
Ответы.....	259
Библиография.....	300
От авторов	304
Об авторах	305

Глава 4

Разделяй и властвуй: деление в уме

Деление в уме — чрезвычайно полезный навык как для бизнеса, так и для повседневной жизни. Сколько раз в неделю вы сталкиваетесь с ситуациями, которые требуют от вас что-то равномерно распределить, например счет в ресторане? Точно такой же навык оказывается кстати, когда вы хотите выяснить стоимость одной упаковки корма для собак, или поделить выигрыш во время игры в покер, или узнать, сколько литров бензина можно купить на 20 долларов. Способность делить в уме избавит вас от необходимости постоянно обращаться к калькулятору, когда вам нужно что-либо посчитать.

При выполнении устного деления метод вычисления слева направо вступает в свои права. Именно ему нас учили в школе, так что вы будете заниматься естественным для себя делом. Помню, что, будучи ребенком, думал, будто метод деления слева направо олицетворяет то, какой арифметика должна быть в принципе. Я часто размышлял о том, что если бы в школе нашли способ преподавать и деление справа налево, они, вероятно, так бы и сделали!

ДЕЛЕНИЕ НА ОДНОЗНАЧНОЕ ЧИСЛО

Первый шаг при делении в уме — предположить, из скольких цифр будет состоять итоговый ответ. Чтобы понять, что я имею в виду, попробуйте решить вот такую задачу:

179 ÷ 7

Чтобы разделить 179 на 7, нужно найти такое число Q , которое 7 раз по Q составит 179. Очевидно, что поскольку 179 находится между $7 \times 10 = 70$ и $7 \times 100 = 700$, Q должно размещаться между 10 и 100. Стало быть, ответ является двузначным числом. Зная это, сначала определяем наибольшее кратное 10, которое может быть умножено на 7 и в итоге оказаться меньше 179. Нам известно, что $7 \times 20 = 140$ и $7 \times 30 = 210$, значит, ответ будет в диапазоне «20 плюс». Отталкиваясь от этого, мы уже можем реально проговорить число «20», так как это будет часть ответа, и она точно не изменится. Далее вычитаем $179 - 140 = 39$. Теперь наша задача сведена к делению $39 \div 7$. Так как $7 \times 5 = 35$, что на 4 меньше 39, у нас появилась вторая часть ответа «5» с остатком 4, или, если вы предпочитаете говорить так: 25 и $4/7$. Вот как выглядит данный процесс деления*.

$$\begin{array}{r}
 25 \\
 7 \overline{)179} \\
 \underline{-140} \\
 39 \\
 \underline{-35} \\
 4 \leftarrow \text{остаток}
 \end{array}$$

Ответ: 25 (остаток 4), или 25 (и $4/7$).

Попробуем решить похожую задачу, используя аналогичные расчеты.

675 ÷ 8

* Автор использует американскую нотацию для деления в столбик. В этой нотации сначала записывается делитель (число 7 в примере ниже), рядом делимое (число 179). Цифры ответа поочередно записываются над делимым. Число под делимым — это произведение делителя и первой цифры ответа (с соответствующим количеством нулей). Затем из разности делимого и этого числа вычитается произведение делителя и следующей цифры ответа, и так далее.

Как и раньше, если 675 находится между $8 \times 10 = 80$ и $8 \times 100 = 800$, то ответ должен быть меньше 100 и выражаться двузначным числом. Чтобы произвести деление, учтем, что $8 \times 80 = 640$ и $8 \times 90 = 720$. То есть ответ должен быть в диапазоне 80 «с хвостиком». Но с каким хвостиком? Чтобы это узнать, вычтите 640 из 675 для получения остатка 35. После произнесения вами «80» наша задача сведется к $35 \div 8$. Так как $8 \times 4 = 32$, итоговый ответ будет 84 с остатком 3, или 84 и $3/8$. Схематически данный пример представим так:

$$\begin{array}{r}
 84 \\
 8 \overline{)675} \\
 \underline{- 640} \\
 35 \\
 \underline{- 32} \\
 3 \leftarrow \text{остаток}
 \end{array}$$

Ответ: 84 (остаток 3), или 84 (и $3/8$).

Как и большинство устных вычислений, процесс деления можно рассматривать как процесс упрощения. Чем больше числа в первом действии, тем проще становится задача. То, что начиналось как $675 \div 8$, было сведено к меньшей задаче $35 \div 8$.

Теперь рассмотрим пример, при решении которого получается трехзначное число.

$$947 \div 4$$

На этот раз ответ будет содержать три цифры, потому что 947 находится между $4 \times 100 = 400$ и $4 \times 1000 = 4000$. Нам следует отыскать наибольшее кратное 100, наиболее близкое к 947. Поскольку $4 \times 200 = 800$, то есть «200 плюс», так что вперед, произнесите это! Вычитание 800 из 947 преподносит новую задачу на деление $147 \div 4$. Так как $4 \times 30 = 120$, теперь мы уже

можем сказать: «30». После вычитания 120 из 147 вычисляем $27 \div 4$ для получения остальной части ответа: 6 с остатком 3. В совокупности имеем 236 с остатком 3, или 236 и $3/4$.

$$\begin{array}{r}
 236 \\
 4 \overline{)947} \\
 \underline{- 800} \\
 147 \\
 \underline{- 120} \\
 27 \\
 \underline{- 24} \\
 3 \quad \leftarrow \text{остаток}
 \end{array}$$

Ответ: 236 (остаток 3), или 236 (и $3/8$).

Процесс деления четырехзначного числа на одну цифру столь же прост, как и следующий пример.

$$2196 \div 5$$

Здесь ответ будет исчисляться сотнями, потому что 2196 находится между $5 \times 100 = 500$ и $5 \times 1000 = 5000$. После вычитания $5 \times 400 = 2000$ из 2196 мы можем произнести «400», и наша задача сведется к деления 196 на 5, что вычисляется так же, как и в предыдущих примерах.

$$\begin{array}{r}
 439 \\
 5 \overline{)2196} \\
 \underline{- 2000} \\
 196 \\
 \underline{- 150} \\
 46 \\
 \underline{- 45} \\
 1 \quad \leftarrow \text{остаток}
 \end{array}$$

Ответ: 439 (остаток 1), или 439 (и $1/5$).

На самом деле существует более простой способ решения последней задачи. Ее можно упростить путем удвоения обоих чисел. Так как $2196 \times 2 = 4392$, то имеем $2196 \div 5 = 4392 \div 10 = 439,2$, или 439 и $2/10$. Мы рассмотрим другие способы упрощения при делении в следующем разделе.

УПРАЖНЕНИЕ: ДЕЛЕНИЕ НА ОДНУ ЦИФРУ

- | | | |
|-----------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| 1. $318 \div 9$ | 2. $726 \div 5$ | 3. $428 \div 7$ |
| 4. $289 \div 8$ | 5. $1328 \div 3$ | 6. $2782 \div 4$ |

ПРАВИЛО БОЛЬШОГО ПАЛЬЦА

При делении в уме запоминание частей ответа может вызвать сложности в процессе вычислений. Одним из вариантов выхода из ситуации является, как мы практиковали ранее, проговаривание ответа вслух по ходу решения. Но для создания большего эффекта вы можете предпочесть (как и я) держать ответ в памяти с помощью пальцев и произносить его целиком в самом конце. Однако при этом вы рискуете столкнуться с проблемой при запоминании чисел, которые больше пяти, ведь у нас лишь пять пальцев на каждой руке. В этом вам поможет специальная техника, в основе которой лежит язык жестов. Я называю ее «Правило большого пальца». Она особенно эффективна для запоминания чисел, состоящих из трех и более цифр, и полезна не только в данной главе, но пригодится и в последующих, где придется иметь дело с задачами посложнее и числами подлиннее.

Вы уже догадались, что для запоминания чисел от 0 до 5 вам достаточно согнуть нужное количество пальцев на руке. Когда

в процесс вовлечен большой палец, будет легко запомнить числа от 6 до 9. Вот список правил большого пальца.

- Чтобы задать 6, поместите большой палец на верхней части мизинца.
- Чтобы задать 7, поместите большой палец на верхней части безымянного пальца.
- Чтобы задать 8, поместите большой палец на верхней части среднего пальца.
- Чтобы задать 9, поместите большой палец на верхней части указательного пальца.

При работе с трехзначным числом задайте цифры для сотен на левой руке и для десятков на правой. Когда дело дойдет до одной цифры, вы достигнете конечной точки решения (за исключением возможного остатка). Теперь произнесите число на левой руке, число на правой руке, последнюю цифру, которую только что посчитали, и остаток (что у вас в голове). И вот! Вы произнесли ответ!

Чтобы попрактиковаться, попробуйте решить следующую задачу на деление четырехзначного числа.

$$4579 \div 6$$

$$\begin{array}{r}
 763 \\
 6 \overline{)4579} \\
 \underline{- 4200} \\
 379 \\
 \underline{- 360} \\
 19 \\
 \underline{- 18} \\
 1 \leftarrow \text{остаток}
 \end{array}$$

Ответ: 763 (остаток 1), или 763 (и 1/6).

Пользуясь приемом большого пальца для запоминания ответа, вы зададите 7 на левой руке, соединив большой палец с безымянным, и 6 на правой, соединив большой палец с мизинцем. Как только вычислите последнюю цифру (она равна 3) и остаток (равный 1), можете «зачитать» итоговый ответ с ваших рук слева направо: «семь...шесть...три с остатком один».

Некоторые задачи на деление четырехзначных чисел дают четырехзначный ответ. В таком случае, поскольку у вас только две руки, вам придется вслух произнести цифру для тысячи и использовать правило большого пальца для запоминания остального ответа. Например:

$$\begin{array}{r}
 8352 \div 3 \\
 \underline{2784} \\
 3 \overline{)8352} \\
 \underline{- 6000} \\
 2352 \\
 \underline{- 2100} \\
 252 \\
 \underline{- 240} \\
 12 \\
 \underline{- 12} \\
 0
 \end{array}$$

Ответ: 2784.

Для решения этой задачи вы делите 8 на 3, чтобы получить цифру 2 для тысяч; произносите «две тысячи» вслух, затем делите 2352 на 3 привычным способом.

ДЕЛЕНИЕ НА ДВУЗНАЧНЫЕ ЧИСЛА

В этом разделе мы исходим из предположения, что вы уже освоили искусство деления на однозначные числа. Естественно, задачи на деление с увеличением делителя более сложные. К счастью, в моем рукаве есть немного магии, чтобы облегчить вам жизнь.

Начнем с относительно простой задачи.

$$597 \div 14$$

Так как 597 находится между 14×10 и 14×100 , ответ (так называемое частное) лежит между 10 и 100. Чтобы его найти, нужно в первую очередь задать вопрос: «Сколько раз по 14 даст в сумме 590?» Умножив $14 \times 40 = 560$, вы узнаете, что ответ будет в диапазоне «40 плюс»; так что можно смело произнести вслух «сорок».

Далее вычитаем 560 из 597 и получаем 37, что сводит задачу к делению 37 на 14. Так как $14 \times 2 = 28$, здесь ответ — 42. Вычитая 28 из 37, мы получаем остаток 9. Процесс решения задачи показан следующим образом.

$$\begin{array}{r}
 42 \\
 14 \overline{)597} \\
 \underline{- 560} \\
 37 \\
 \underline{- 28} \\
 9 \quad \leftarrow \text{остаток}
 \end{array}$$

Ответ: 42 (остаток 9), или 42 (и 9/14).

Следующая задачка немного сложнее, потому что делитель в ней больше.

$$682 \div 23$$

В данном примере ответ будет двузначным числом, так как 682 находится между $23 \times 10 = 230$ и $23 \times 100 = 2300$. Чтобы найти цифру для десятка двузначного числа, нужно подумать: «Сколько раз по 23 даст в сумме 680?» Если вы попробуете 30, то увидите, что здесь незначительный перебор, так как $23 \times 30 = 690$. Но теперь вы знаете, что ответ лежит в диапазоне «20 плюс» и можете произнести это вслух. Затем вычтите $23 \times 20 = 460$ из 682, чтобы получить 222. Так как $23 \times 9 = 207$, ответ — 29 и остаток $222 - 207 = 15$.

$$\begin{array}{r}
 29 \\
 23 \overline{)682} \\
 \underline{- 460} \\
 222 \\
 \underline{- 207} \\
 15 \leftarrow \text{остаток}
 \end{array}$$

Ответ: 29 (остаток) 9, или 29 (и 15/23).

Теперь вычислим:

$$491 \div 62$$

Так как 491 меньше, чем $62 \times 10 = 620$, ответ будет представлен одной цифрой с остатком. Можно попробовать 8, но $62 \times 8 = 496$, а это несколько больше делимого. Поскольку $62 \times 7 = 434$, ответ — 7 и остаток $491 - 434 = 57$, или 7 и 57/62.

$$\begin{array}{r}
 7 \\
 62 \overline{)491} \\
 \underline{- 434} \\
 57 \leftarrow \text{остаток}
 \end{array}$$

Ответ: 7 (остаток 57), или 7 (и 57/62).

Один отличный трюк может облегчить решение таких задач. Помните, как сначала мы пытались перемножить $62 \times 8 = 496$, но обнаружили, что это число больше, чем нужно? Но это действие оказалось не напрасным. Помимо информации о том, что ответ — 7, оно также позволяет сразу определить остаток. Поскольку 496 на 5 единиц больше 491, остаток будет на 5 единиц меньше делителя 62. Поскольку $62 - 5 = 57$, то ответ — 7 и $57/62$. Этот прием работает потому, что $491 = (62 \times 8) - 5 = 62 \times (7 + 1) - 5 = (62 \times 7 + 62) - 5 = (62 \times 7) + (62 - 5) = 62 \times 7 + 57$.

Теперь попробуйте решить пример $380 \div 39$, используя вышеописанную уловку. Итак, $39 \times 10 = 390$, что больше делимого на 10. Стало быть, ответ будет 9 с остатком $39 - 10 = 29$.

Следующий вызов для вас — деление четырехзначного числа на двузначное.

3657 ÷ 54

Так как $54 \times 100 = 5400$, то ответ будет двузначным числом. Для получения первой цифры ответа необходимо выяснить, сколько раз по 54 даст в сумме 3657. Исходя из того что $54 \times 70 = 3789$ (что немного больше делимого), ответ будет где-то в диапазоне «60 плюс».

Далее умножаем $54 \times 60 = 3240$ и вычитаем $3657 - 3240 = 417$. Как только вы произнесете «60», ваша задача упростится до $417 \div 54$. Поскольку $54 \times 8 = 432$ (что тоже немного больше 417), последняя цифра будет 7 с остатком $54 - 15 = 39$.

$$\begin{array}{r}
 67 \\
 54 \overline{)3657} \\
 \underline{- 3240} \\
 417 \\
 \underline{- 379} \\
 39 \leftarrow \text{остаток}
 \end{array}$$

Ответ: 67 (остаток 39), или 67 (и 39/54).

Теперь попробуйте свои силы в решении задачи с трехзначным частным:

$$9467 \div 13$$

$$\begin{array}{r}
 728 \\
 13 \overline{)9467} \\
 \underline{- 9100} \\
 367 \\
 \underline{- 260} \\
 107 \\
 \underline{- 104} \\
 3 \leftarrow \text{остаток}
 \end{array}$$

Ответ: 728 (остаток 3), или 728 (и 3/13).

Упрощение задач на деление

Если к этому моменту ваш мозг уже устал от перенапряжения, расслабьтесь. Как и было обещано, я поделюсь с вами несколькими приемами упрощения задач на деление в уме. Они основаны на принципе деления обеих частей задачи на общий множитель. Если оба числа в примере четные, вы можете вдвойне упростить проблему путем деления каждого числа на 2 перед началом вычислений. Например, задача $858 \div 16$ содержит два четных числа, и их деление на 2 ведет к значительно более простому действию $429 \div 8$.

$$\begin{array}{r}
 53 \\
 16 \overline{)858} \\
 \underline{- 800} \\
 58 \\
 \underline{- 48} \\
 10
 \end{array}$$

Ответ: 53 (и 10/16).

делим на 2

$$\begin{array}{r}
 53 \\
 8 \overline{)429} \\
 \underline{- 400} \\
 29 \\
 \underline{- 24} \\
 5
 \end{array}$$

Ответ: 53 (и 5/8).

Как видите, остатки 10 и 5 различны; но если записать их в виде дроби, получится $10/16$, что равно $5/8$. Поэтому в данном методе ответ всегда должен быть представлен в виде дроби.

Мы проделали оба типа вычислений для того, чтобы вы убедились, насколько второй способ легче. Теперь ваша очередь практиковаться:

$$3618 \div 54$$

$$\begin{array}{r} 67 \\ 54 \overline{)3618} \\ \underline{- 3240} \\ 378 \\ \underline{- 378} \\ 0 \end{array}$$

Ответ: 67.

Делим на 2

$$\begin{array}{r} 67 \\ 27 \overline{)1809} \\ \underline{- 1620} \\ 189 \\ \underline{- 189} \\ 0 \end{array}$$

Ответ: 67.

Пример справа гораздо легче решить в уме. Если вы все еще в этом не уверены, можете разделить обе части исходной задачи на 18 для получения еще более простой задачи: $201 \div \div 3 = 67$.

Высматривайте задачи, которые можно подвергнуть делению на 2 дважды, такие как $1652 \div 36$.

$$\begin{array}{rclclcl} 1652 \div 36 & = & 826 \div 18 & = & 413 \div 9 & = & 9 \overline{)413} \\ & & \div 2 & & \div 2 & & \underline{- 360} \\ & & & & & & 53 \\ & & & & & & \underline{- 45} \\ & & & & & & 8 \end{array}$$

Ответ: 45 (и 8/9).

Разделяй и властвуй: деление в уме

Мне кажется, что проще дважды разделить числа на 2, чем делить каждое из чисел на 4. Теперь рассмотрим случай, когда оба числа оканчиваются на 0. В этой ситуации можно каждое число разделить на 10.

$$\begin{array}{rclcl} 580 \div 70 & = & 58 \div 7 & = & \begin{array}{r} 8 \\ 7 \overline{)58} \\ \underline{-56} \\ 2 \end{array} \\ & \div 10 & & & \end{array}$$

Ответ: 8 (и 2/7).

Если оба числа заканчиваются на 5, удвойте их, а затем разделите на 10 для упрощения задачи. Например:

$$\begin{array}{rclcl} 475 \div 35 & = & 950 \div 70 & = & 95 \div 7 & = & \begin{array}{r} 13 \\ 7 \overline{)95} \\ \underline{-70} \\ 25 \\ \underline{-21} \\ 4 \end{array} \\ & \times 2 & & \div 10 & & & \end{array}$$

Ответ: 13 (и 4/7).

Наконец, если делитель оканчивается на 5, а делимое на 0, умножьте оба на 2, а затем разделите на 10 и далее действуйте так, как мы делали выше.

$$\begin{array}{rclcl} 890 \div 45 & = & 1780 \div 90 & = & 178 \div 9 & = & \begin{array}{r} 19 \\ 9 \overline{)178} \\ \underline{-90} \\ 88 \\ \underline{-81} \\ 7 \end{array} \\ & \times 2 & & \div 10 & & & \end{array}$$

Ответ: 19 (и 7/9).

УПРАЖНЕНИЕ: ДЕЛЕНИЕ НА ДВУЗНАЧНЫЕ ЧИСЛА

Здесь вы найдете разнообразные задачи по делению на двузначные числа, которые проверят ваше ментальное мастерство и умение пользоваться простыми техниками упрощения, которые были объяснены в этой главе. Загляните в конец книги для получения объяснений и сверки ответов.

1. $738 \div 17$ 2. $591 \div 24$ 3. $321 \div 79$

4. $4268 \div 28$ 5. $7214 \div 11$ 6. $3074 \div 18$

РАЗВИВАЕМ СВОИ СПОСОБНОСТИ: ИЗУЧЕНИЕ ДЕСЯТИЧНОЙ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Как вы уже, наверное, догадались, мне нравится заниматься магией, превращая обычные дроби в десятичные. В случае с дробями, в знаменателе которых есть только одна цифра, лучший способ превратить их в десятичные — это почерпнуть их значения из памяти. Это не так сложно, как кажется. Далее вы увидите, что большинство дробей, числители и знаменатели которых представлены однозначными числами (а также 10 или 11), обладают особыми свойствами, поэтому их сложно забыть. Каждый раз, когда вы можете сократить дробь до уже известного вам значения, это ускорит процесс вычислений.

Уверен, вы уже знаете десятичные эквиваленты для следующих дробей:

$$\frac{1}{2} = 0,50; \quad \frac{1}{3} = 0,333...; \quad \frac{2}{3} = 0,666... .$$

Подобно этому

$$\frac{1}{4} = 0,25; \quad \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,50; \quad \frac{3}{4} = 0,75.$$

Дроби с пятерками в знаменателе запомнить легче всего.

$$\frac{1}{5} = 0,20; \quad \frac{2}{5} = 0,40; \quad \frac{3}{5} = 0,60; \quad \frac{4}{5} = 0,80.$$

Дроби с шестерками в знаменателе требуют запоминания только двух новых значений.

$$\frac{1}{6} = 0,1666...; \quad \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0,333...; \quad \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,50;$$

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 0,666...; \quad \frac{5}{6} = 0,8333... .$$

Через мгновение я вернусь к дробям с семерками в знаменателе. А сейчас дроби с восьмерками в знаменателе, преобразовать которые просто элементарно.

$$\frac{1}{8} = 0,125; \quad \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0,25;$$

$$\frac{3}{8} = 0,375 \left(3 \times \frac{1}{8} = 3 \times 0,125 = 0,375 \right); \quad \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0,50;$$

$$\frac{5}{8} = 0,625 \left(5 \times \frac{1}{8} = 5 \times 0,125 = 0,625 \right); \quad \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0,75;$$

Дроби с девятками в знаменателе таят в себе особое волшебство.

$$\frac{1}{9} = 0,\bar{1}; \quad \frac{2}{9} = 0,\bar{2}; \quad \frac{3}{9} = 0,\bar{3}; \quad \frac{4}{9} = 0,\bar{4};$$

$$\frac{5}{9} = 0,\bar{5}; \quad \frac{6}{9} = 0,\bar{6}; \quad \frac{7}{9} = 0,\bar{7}; \quad \frac{8}{9} = 0,\bar{8}.$$

где черта над цифрой обозначает бесконечное повторение этой цифры (говорят, что это дробь в периоде). Например, $4/9 = 0,444...$.

Дроби с десятками в знаменателе нам уже известны.

$$\frac{1}{10} = 0,1; \quad \frac{2}{10} = 0,2; \quad \frac{3}{10} = 0,3;$$

$$\frac{4}{10} = 0,4; \quad \frac{5}{10} = 0,5; \quad \frac{6}{10} = 0,6;$$

$$\frac{7}{10} = 0,7; \quad \frac{8}{10} = 0,8; \quad \frac{9}{10} = 0,9.$$

Дроби со знаменателем 11 легко вычисляются, если вы запомните, что $1/11 = 0,0909$.

$$\frac{1}{11} = 0,\overline{09} = 0,0909...; \quad \frac{2}{11} = 0,\overline{18} = (2 \times 0,0909);$$

$$\frac{3}{11} = 0,\overline{27} = (3 \times 0,0909); \quad \frac{4}{11} = 0,\overline{36}; \quad \frac{5}{11} = 0,\overline{45};$$

$$\frac{6}{11} = 0,\overline{54}; \quad \frac{7}{11} = 0,\overline{63}; \quad \frac{8}{11} = 0,\overline{72};$$

$$\frac{9}{11} = 0,\overline{81}; \quad \frac{10}{11} = 0,\overline{90}.$$

Дроби со знаменателем 7 действительно выдающиеся. Как только вы запомните, что $\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}$, то сможете без труда получить значения других дробей с 7 в знаменателе.

$$\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}; \quad \frac{2}{7} = 0,\overline{285714}; \quad \frac{3}{7} = 0,\overline{428571};$$

$$\frac{4}{7} = 0,\overline{571428}; \quad \frac{5}{7} = 0,\overline{714285}; \quad \frac{6}{7} = 0,\overline{857142}.$$

Обратите внимание, что последовательность цифр в периоде циклически повторяется в каждой дроби, при этом изменяется лишь начальная цифра последовательности. Ее можно определить путем умножения 0,14 на числитель дроби. Например, для дроби $2/7$ имеем $2 \times 0,14 = 0,28$. Поэтому последовательность должна начинаться с 2. Для дроби $3/7$ это $3 \times 0,14 = 0,42$, значит, последовательность начинается с 4. Другие дроби подчиняются тому же правилу.

Конечно, в процессе решения разнообразных задач вы обязательно столкнетесь с дробями, превышающими $10/11$. Поэтому постоянно обдумывайте способы упрощения таких задач. Например, можно упростить дробь $18/34$ путем деления числителя и знаменателя на 2, чтобы сократить задачу до $9/17$ (ее будет легче решить).

Если знаменатель дроби — четное число, можно упростить дробь, уменьшив ее вдвое, даже если числитель нечетный. Например,

$$\frac{9}{14} = \frac{4,5}{7}$$

Деление числителя и знаменателя на 2 сведет проблему к дроби с семеркой в знаменателе. Хотя ранее показанная последовательность дробей не предоставляет десятичного варианта для дроби $4,5/7$, как только вы начнете считать, заученное число неожиданно всплывет в памяти.

$$\begin{array}{r} 0,6428571 \\ 7 \overline{)4,5000000} \\ \underline{- 4,2} \\ 3 \end{array}$$

Как видите, вам не пришлось решать задачу целиком. Стоит вам разделить 3 на 7, и вы точно произведете огромное

впечатление на публику, отбарабанив этот длинный набор цифр почти мгновенно!*

Когда делитель заканчивается на 5, то почти всегда умножение на 2, а потом деление на 10 оправдывает себя. Например:

$$\frac{29}{45} = \frac{58}{90} = \frac{5,8}{9} = 0,6\overline{44}.$$

$\times 2 \qquad \qquad \div 10$

Числа, которые заканчиваются на 25 или 75, надо сначала умножить на 4 и затем разделить на 100.

$$\frac{31}{25} = \frac{124}{100} = 1,24$$

$\times 4 \qquad \qquad \div 100$

$$\frac{62}{75} = \frac{248}{300} = \frac{2,48}{3} = 0,82\overline{66}.$$

$\times 4 \qquad \qquad \div 100$

Этот трюк можно применять даже в середине расчетов. Если вам нужно вычислить дробь 3/16, произойдет вот что:

$$\begin{array}{r} 0,1 \\ 16 \overline{) 3,000} \\ \underline{- 16} \\ 14 \end{array}$$

Как только задача сведется к вычислению 14/16, можно привести ее к виду 7/8, что, как известно, равняется 0,875. Отсюда 3/16 = 0,1875**.

* Вычисления происходят следующим образом: $4,5/7 = 4,2/7 + 0,3/7 = 0,6 + 0,1 \times 3/7 = 0,6 + 0,1 \times 0,428571 = 0,6 + 0,0428571 = 0,6428571$.
Прим. ред.

** Здесь вычисления вновь требуют пояснений: $3/16 = 0,1 \times 30/16 = 0,1 \times 15/8 = 0,1 \times (1 + 7/8) = 0,1 + 0,1 \times 7/8 = 0,1 + 0,1 \times 0,875 = 0,1 + 0,0875 = 0,1875$. *Прим. ред.*

УПРАЖНЕНИЕ:
ПРИВЕДЕНИЕ ДРОБЕЙ К ДЕСЯТИЧНОЙ ФОРМЕ

Чтобы решить следующие задачи, не забудьте использовать полученные знания о десятичном виде различных «одноцифровых» дробей. Везде, где это целесообразно, упрощайте дроби, прежде чем преобразовать их в десятичные.

1. $\frac{2}{5}$ 2. $\frac{4}{7}$ 3. $\frac{3}{8}$ 4. $\frac{9}{12}$ 5. $\frac{5}{12}$ 6. $\frac{6}{11}$
7. $\frac{14}{24}$ 8. $\frac{13}{27}$ 9. $\frac{18}{48}$ 10. $\frac{10}{14}$ 11. $\frac{6}{32}$ 12. $\frac{19}{45}$

ПРИЗНАКИ ДЕЛИМОСТИ

В последнем разделе мы узнали, как упростить задачи на деление, если числитель и знаменатель поделить на общий множитель. В завершение этой главы обсудим, как определить, является ли одно число делителем другого. Это поможет упростить задачу на деление и ускорить процесс решения многих задач на умножение, а также пригодится, когда мы доберемся до продвинутого умножения, где часто придется искать способы разложить на множители двух-, трех- или даже пятизначные числа. Умение делать это окажется весьма полезным.

Проверить, делится ли число на 2, довольно просто. Вам нужно только определить, является ли последняя цифра четной. Если это 2, 4, 6, 8 или 0, то число целиком делится на 2.

Чтобы протестировать число на делимость на 4, проверьте, делятся ли на 4 две его последние цифры. Число 57 852 кратно 4, потому что $52 = 13 \times 4$. Число 69 346 не кратно 4, поскольку 46 не делится на 4 без остатка. Это правило работает потому, что 4 делит 100 и, следовательно, любое число, кратное 100.

Таким образом, поскольку 57 800 и 52 делятся на 4, то 4 поделит и их сумму, то есть 57 852.

Аналогично, так как 1000 делится на 8, для проверки кратности 8 достаточно выяснить, делятся ли на 8 последние три цифры числа. Например, для 14 918 надо проверить число 918 на делимость на 8. Однако при делении 918 на 8 имеем остаток ($918 \div 8 = 114 \text{ } 6/8$), из чего делаем вывод, что число 14 918 на 8 не делится. Можно также заметить, что 18 (две последние цифры числа 14 918) не делится на 4, а так как 14 918 не делится на 4, оно не может делиться и на 8.

Когда дело доходит до делимости на 3, предлагаю запомнить одно простое правило: число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма составляющих его цифр делится на 3 (независимо от того, сколько цифр в числе). Чтобы выяснить, делится ли 57 852 на 3, просто сложите $5 + 7 + 8 + 5 + 2 = 27$. Так как 27 кратно 3, то и 57 852 будет кратно 3. Столь же удивительное правило справедливо и для делимости на 9. Число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма составляющих его цифр кратна 9. Поэтому 57 852 кратно 9, тогда как число 31 416, сумма цифр которого равна 15, на 9 не делится. Объясняется это правило тем, что числа 1, 10, 100, 1000, 10000 и т. д. всегда на единицу больше кратного 9.

Число делится на 6 только в том случае, если оно четное и делится на 3. Так что кратность 6 легко проверить.

Установить, делится ли число на 5, еще проще. Любое число, независимо от величины, кратно 5 тогда и только тогда, когда оно заканчивается на 5 или 0.

Выяснить делимость на 11 почти так же просто, как на 3 или на 9. Число делится на 11 тогда и только тогда, когда в результате попеременного вычитания и сложения составляющих его цифр вы получите либо 0, либо кратное 11.

Например, 73 958 не делится на 11, потому что $7 - 3 + 9 - 5 + 8 = 16$. Однако числа 8 492 и 73 194 кратны 11, так как $8 - 4 + 9 - 2 = 11$ и $7 - 3 + 1 - 9 + 4 = 0$. Это правило работает потому, что числа 1, 100, 10 000, 1 000 000 на единицу больше кратно 11, в то время как числа 10, 1000, 100 000 и т. д. на единицу меньше величины, кратной 11.

Проверка делимости на 7 несколько сложнее. Если вы прибавите (или вычтите) число, кратное 7, к проверяемому (или из проверяемого) и полученный результат будет делиться на 7, ответ положительный. Я всегда выбираю такое прибавляемое или вычитаемое кратное 7, чтобы в итоге сумма или разность заканчивалась на 0. Например, для проверки числа 5292 я вычитаю 42 (кратное 7), чтобы получить 5250. Далее избавляюсь от 0 на конце (так как деление на десять не влияет на проверку делимости на семь), получая в итоге 525. Затем повторяю процесс, прибавляя 35 (кратное 7), что дает мне 560. Когда я удалю 0, то останусь с числом 56, которое, как мне известно, кратно 7. Таким образом, исходное число 5292 делится на 7.

Этот метод работает не только для 7, но и для любого нечетного числа, кроме оканчивающегося на 5. Например, чтобы проверить, делится ли 8792 на 13, вычитаем $4 \times 13 = 52$ из 8792 и получаем 8740. Опуская 0, имеем 874. Затем прибавляем $2 \times 13 = 26$, выходит 900. Удаление двух нулей оставляет нас с числом 9, которое, очевидно, не кратно 13. Таким образом, 8792 не делится на 13.

УПРАЖНЕНИЕ: ПРОВЕРКА НА ДЕЛИМОСТЬ

В этом упражнении будьте особенно внимательны при проверке делимости на 7 и 17. Остальное не должно представлять для вас трудностей.

Делимость на 2

1. **53 428** 2. **293** 3. **7241** 4. **9846**

Делимость на 4

5. **3932** 6. **67 348** 7. **358** 8. **57 929**

Делимость на 8

9. **59 366** 10. **73 488** 11. **248** 12. **6111**

Делимость на 3

13. **83 671** 14. **94 737** 15. **7359** 16. **3 267 486**

Делимость на 6

17. **5334** 18. **67 386** 19. **248** 20. **5991**

Делимость на 9

21. **1234** 22. **8469** 23. **4 425 575** 24. **314 159 265**

Делимость на 5

25. **47 830** 26. **43 762** 27. **56 785** 28. **37 210**

Делимость на 11

29. **53 867** 30. **4969** 31. **3828** 32. **941 369**

Делимость на 7

33. **5784** 34. **7336** 35. **875** 36. **1183**

Делимость на 17

37. **694** 38. **629** 39. **8273** 40. **13 855**

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДРОБИ

Если вы в состоянии управиться с целыми числами, то арифметические действия с дробями покажутся вам почти такими же легкими. В этом разделе мы сделаем обзор основных методов сложения, вычитания, умножения, деления и сокращения обыкновенных дробей. Те, кто знаком с дробями, могут спокойно его пропустить.

Умножение обыкновенных дробей

Чтобы перемножить две обыкновенные дроби, нужно просто перемножить их числители (верхние числа), а затем знаменатели (нижние числа). Например:

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}; \quad \frac{1}{2} \times \frac{5}{9} = \frac{5}{18}.$$

Что может быть проще! Попробуйте следующие упражнения, прежде чем двигаться дальше.

УПРАЖНЕНИЕ: УМНОЖЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДРОБЕЙ

1. $\frac{3}{5} \times \frac{2}{7}$ 2. $\frac{4}{9} \times \frac{11}{7}$ 3. $\frac{6}{7} \times \frac{3}{4}$ 4. $\frac{9}{10} \times \frac{7}{8}$

Деление обыкновенных дробей

Деление дробей столь же легкое, как и умножение. Однако оно требует одного дополнительного действия. Сначала переверните вторую дробь с ног на голову (это называется обратная дробь), а затем умножайте. Например, обратная дробь для $4/5$ будет $5/4$. Следовательно,

$$\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{10}{12}.$$

$$\frac{1}{2} \div \frac{5}{9} = \frac{1}{2} \times \frac{9}{5} = \frac{9}{10}.$$

УПРАЖНЕНИЕ: ДЕЛЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДРОБЕЙ

Теперь ваша очередь. Поделите эти дроби.

1. $\frac{2}{5} \div \frac{1}{2}$

2. $\frac{1}{3} \div \frac{6}{5}$

3. $\frac{2}{5} \div \frac{3}{5}$

Сокращение обыкновенных дробей

Дроби можно рассматривать как маленькие задачки на деление. Например, $6/3$ то же самое, что и $6 \div 3 = 2$. Дробь $1/4$ то же самое, что и $1 \div 4$ (или 0,25 в десятичной форме). Известно, что если умножить любое число на 1, то это число не изменится. Например, $3/5 = 3/5 \times 1$. Но если заменить 1 дробью $2/2$, то получим $3/5 = 3/5 \times 1 = 3/5 \times 2/2 = 6/10$. Следовательно, $3/5 = 6/10$. По такому же принципу, заменив 1 дробью $3/3$, получим $3/5 = 3/5 \times 3/3 = 9/15$. Другими словами, если мы *умножаем* числитель и знаменатель на одно и то же число, то получаем дробь, равную исходной.

Вот еще пример:

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{5} = \frac{10}{15}.$$

Верно и то, что, *деля* числитель и знаменатель на одинаковое число, мы получаем дробь, равную исходной.

Например:

$$\frac{4}{6} = \frac{4}{6} \div \frac{2}{2} = \frac{2}{3}.$$

$$\frac{25}{35} = \frac{25}{35} \div \frac{5}{5} = \frac{5}{7}.$$

Это *сокращение* дроби.

УПРАЖНЕНИЕ: СОКРАЩЕНИЕ ДРОБЕЙ

Найдите дробь со знаменателем 12, равную дробям, представленным ниже.

1. $\frac{1}{3}$

2. $\frac{5}{6}$

3. $\frac{3}{4}$

4. $\frac{5}{2}$

Сокращение дробей.

5. $\frac{8}{10}$

6. $\frac{6}{15}$

7. $\frac{24}{36}$

8. $\frac{20}{36}$

Сложение дробей

Это действие можно считать простым, когда знаменатели равны. В этом случае складываются числители и сохраняется прежний знаменатель.

Например:

$$\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}; \quad \frac{4}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7}.$$

Иногда можно упростить ответ. Например:

$$\frac{1}{8} + \frac{5}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

УПРАЖНЕНИЕ:

СЛОЖЕНИЕ ДРОБЕЙ (С РАВНЫМИ ЗНАМЕНАТЕЛЯМИ)

1. $\frac{2}{9} + \frac{5}{9}$

2. $\frac{5}{12} + \frac{4}{12}$

3. $\frac{5}{18} + \frac{6}{18}$

4. $\frac{3}{10} + \frac{3}{10}$

Более коварный случай — различные знаменатели. Когда знаменатели не равны, нужно заменить исходные дроби дробями с равными знаменателями.

Например, сложите

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{15}.$$

Заметим, что

$$\frac{1}{3} = \frac{5}{15}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{15} = \frac{5}{15} + \frac{2}{15} = \frac{7}{15}.$$

При сложении

$$\frac{1}{2} + \frac{7}{8}.$$

Замечаем, что

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{8}.$$

Тогда

$$\frac{1}{2} + \frac{7}{8} = \frac{4}{8} + \frac{7}{8} = \frac{11}{8}.$$

При сложении

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5}.$$

Видим, что

$$\frac{1}{3} = \frac{5}{15} \quad \text{и} \quad \frac{2}{5} = \frac{6}{15}.$$

В итоге

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{5}{15} + \frac{6}{15} = \frac{11}{15}.$$

УПРАЖНЕНИЕ:
СЛОЖЕНИЕ ДРОБЕЙ (С НЕРАВНЫМИ ЗНАМЕНАТЕЛЯМИ)

1. $\frac{1}{5} + \frac{1}{10}$ 2. $\frac{1}{6} + \frac{5}{18}$ 3. $\frac{1}{3} + \frac{1}{5}$ 4. $\frac{2}{7} + \frac{5}{21}$
5. $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$ 6. $\frac{3}{7} + \frac{3}{5}$ 7. $\frac{2}{11} + \frac{5}{9}$

Вычитание дробей

Вычитание дробей похоже на их сложение. Мы покажем это действие на примерах и обеспечим вас тренировочными упражнениями.

$$\frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{2}{5}; \quad \frac{4}{7} - \frac{2}{7} = \frac{2}{7}; \quad \frac{5}{8} - \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{3} - \frac{2}{15} = \frac{5}{15} - \frac{2}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5};$$

$$\frac{7}{8} - \frac{1}{2} = \frac{7}{8} - \frac{4}{8} = \frac{3}{8};$$

$$\frac{1}{2} - \frac{7}{8} = \frac{4}{8} - \frac{7}{8} = \frac{-3}{8}; \quad \frac{2}{7} - \frac{1}{4} = \frac{8}{28} - \frac{7}{28} = \frac{1}{28};$$

$$\frac{2}{3} - \frac{5}{8} = \frac{16}{24} - \frac{15}{24} = \frac{1}{24}.$$

УПРАЖНЕНИЕ: ВЫЧИТАНИЕ ДРОБЕЙ

1. $\frac{8}{11} - \frac{3}{11}$ 2. $\frac{12}{7} - \frac{8}{7}$ 3. $\frac{13}{18} - \frac{5}{18}$
4. $\frac{4}{5} - \frac{1}{15}$ 5. $\frac{9}{10} - \frac{3}{5}$ 6. $\frac{3}{4} - \frac{2}{3}$
7. $\frac{7}{8} - \frac{1}{16}$ 8. $\frac{4}{7} - \frac{2}{5}$ 9. $\frac{8}{9} - \frac{1}{2}$



[Почитать описание, рецензии
и купить на сайте](#)

Лучшие цитаты из книг, бесплатные главы и новинки:



[Mifbooks](#)



[Mifbooks](#)



[Mifbooks](#)